C. LEBOSSE
Agrégé de mathématiques
Professeur au lycée Claude Bernard

C. HEMERY
Agrégé de mathématiques
Professeur au collège Lavoisier

ALGEBRE
ARITHMETIQUE
ET GEOMETRIE

Classe de Quatrième
des lycées et collèges

Dix-neuvième édition
PROGRAMMES 1947

LIBRAIRIE FERNAND NATHAN
1951

Programme du 18 AVRIL 1947

Classe de Quatrième classique A et B
et de Quatrième moderne
(Horaire hebdomadaire : deux heures et demie)

ALGEBRE

Nombres algébriques (positifs, nul, négatifs). Opérations sur ces nombres exposés à partir de problèmes concrets. Inégalités. Mesures algébriques de vecteurs sur une droite orientée. Formule de Chasles. Repérage d'un point sur un axe.
Eléments du calcul algébrique : propriétés des sommes et des produits. Puissances. Produit et quotient de deux puissances d'un nombre : usage de l'exposant nul et d'exposants négatifs.
Monômes. Produit de monômes. Quotient de deux monômes. Somme de monômes semblables (on se bornera à des monômes à une, deux ou trois variables). Polynômes à une variable ; addition, soustraction, multiplication par une constante.
Equations numériques du premier degré à une inconnue.
Problèmes conduisant à une équation numérique du premier degré à une inconnue.

ARITHMETIQUE

Pratique, sur des exemples, de la décomposition d'un nombre entier en facteurs premiers, de la recherche du plus grand commun diviseur et du plus petit commun multiple de deux ou plusieurs nombres. Applications aux fractions.

GEOMETRIE

I.- Triangles. Triangle isocèle. Cas d'égalité des triangles rectangles.
Inégalités dans le triangle. Comparaison des longueurs de la perpendiculaire et des obliques menées par un point à une droite. Régions séparées par la médiatrice d'un segment.
II. - Droites parallèles (la notion de bande, la définition et l'utilisation de la symétrie par rapport à un point sont facultatives). Perpendiculaires communes. Angles avec une sécante. Tracé des parallèles. Angles à côtés parallèles.
Angles extérieurs d'un triangle. Somme des angles d'un triangle.
Définition de polygones : quadrilatère, trapèze, parallélogramme, rectangle, losange, carré.
Propriétés du parallélogramme, du rectangle, du triangle rectangle (médiane relative à l'hypoténuse), du losange ; théorèmes réciproques.
Somme des angles d'un polygone convexe (angles intérieurs, angles extérieurs).
III. - Comparaison, dans un cercle, des arcs, des cordes, des distances du centre à ces cordes.
Intersection d'une droite et d'un cercle ; tangente. Positions relatives de deux cercles.
Constructions élémentaires sur la droite et le cercle. Constructions de triangles.
Comparaison de l'angle inscrit et de l'angle au centre interceptant le même arc. Propriétés des angles d'un quadrilatère inscriptible (convexe ou non convexe).

ALGEBRE

Première leçon

NOMBRES ALGEBRIQUES

1. Grandeur orientées. Certaines grandeurs peuvent être mesurées dans deux sens différents.
1er exemple. Les opérations faites par un commerçant sont des recettes ou des dépenses. L'avoir de ce commerçant n est pas le même selon qu'il encaisse 1000 francs ou qu'il dépense 1000 francs. Il est commode de remplacer le mot recette par un signe (+ par exemple) et le mot dépense par un autre signe (- par exemple) . Le nombre (+1000) désigne ainsi une recette de 1000 f et le nombre (-1000) une dépense de 1000 francs.
2e exemple. Le repérage des températures s'effectue à l'aide du thermomètre, à partir de 0, température de la glace fondante. Une température de 15° n'a de signification précise que si le nombre 15 est précédé des mots "au-dessus de 0" ou "au-dessous de 0". Il est commode de remplacer ces mots par les signes + et -. On dit +15° et -15°.
Ces exemples justifient les définitions suivantes :
2. Définitions.
On appelle nombre positif un nombre arithmétique précédé du signe +.
On appelle nombre négatif un nombre arithmétique précédé du signe -.
L'ensemble des nombres positifs et négatifs constitue les nombres algébriques. Exemples (+12), (-15).

On appelle valeur absolue d'un nombre algébrique le nombre arithmétique obtenu en supprimant son signe.
Le nombre (+12) a pour valeur absolue 12.
1e remarque. La valeur absolue et le signe d'un nombre algébrique sont liés l'un à l'autre et ne peuvent être disjoints ; c'est pourquoi on place souvent les nombres algébriques entre parenthèses.
2e remarque. Un nombre algébrique peut être représenté par une lettre.
Son signe est alors incorporé à la lettre. x peut aussi bien désigner un nombre négatif qu'un nombre positif.
Sa valeur absolue est représentée par le symbole suivant : $|x|$
Ainsi, si x désigne le nombre (-12), on a $|x|$ = 12.
3e remarque. Les signes + et - qui indiquent qu'un nombre est positif ou négatif ne sont pas des signes d'opérations ; nous aurions pu en utiliser d'autres que ceux-là.

3. Nombres algébriques égaux. - Deux nombres algébriques sont égaux lorsqu'ils ont même valeur absolue et même signe.
Ainsi (+0,75) = (+3/4)

4. Nombres algébriques opposés (ou symétriques). Deux nombres algébriques sont opposés (ou

symétriques) lorsqu'ils ont même valeur absolue et des signes contraires.
Exemple (+9) et (-9)

5. Repérage d'un point sur une droite.
Soit une droite xy et un point O de cette droite (fig. 1). Si nous voulons placer sur xy un point A tel que OA = 3 cm, il faut préciser le sens dans lequel on doit porter la distance OA. Pour remédier à cet inconvénient convenons que les distances portées dans le sens xy (sens de la flèche) seront précédées du signe + et que les distances portées dans le sens yx (sens inverse de la flèche) seront précédées du signe -.

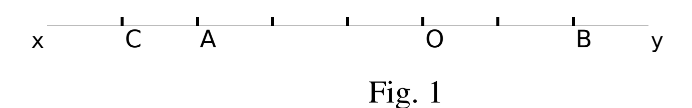


Fig. 1

La droite xy s'appelle alors droite orientée ou axe.
Au nombre (-3) correspond ainsi le point A tel que OA = 3, la distance OA étant portée dans le sens inverse de la flèche.
Au nombre (+2) correspond le point B tel que OB = 2, la distance OB étant portée dans le sens de la flèche.

En général à tout nombre algébrique donné correspond sur l'axe xy un point et un seul.
Réciproquement, soit C un point de xy ; nous pouvons lui faire correspondre le nombre (-4) puisque la distance OC = 4 cm est portée dans le sens inverse de la flèche.

En général à tout point de l'axe xy correspond un nombre algébrique qu'on appelle l'abscisse de ce point.
Le point O s'appelle l'origine des abscisses.
Ainsi l'abscisse de A est (-3), celle de B est (+2), celle de C est (-4).

6. Vecteur. Deux points A et B de la droite xy définissent un segment de droite et un seul. En arithmétique les chemins AB ou BA sont équivalents. En algèbre, sur l'axe xy, les parcours AB ou BA ne sont pas équivalents, car ils sont de sens contraires. Nous dirons que les points A et B pris dans cet ordre définissent un vecteur d'origine A, d'extrémité B, que nous symboliserons par $\overrightarrow{AB}$
Ainsi :
Un vecteur est un segment de droite orienté ; la lettre énoncée la première est l'origine du vecteur, la seconde l'extrémité.
Il ne faut pas confondre $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BA}$

7. Mesure algébrique d'un vecteur.
Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est mesuré sur l'axe xy par un nombre positif, car le parcours AB se fait dans le sens de la flèche ; sa valeur absolue est 5. Nous symbolisons par $\overline{AB}$ la mesure algébrique de AB et nous écrirons : $\overline{AB} = +5$

Le vecteur $\overrightarrow{BA}$ est mesuré par le nombre algébrique (-5) car le parcours BA se fait dans le sens inverse de la flèche ; nous écrirons : $\overline{BA} = -5$

En particulier, l'abscisse d'un point C de xy est la mesure algébrique du vecteur $\overrightarrow{OC}$; on a

$$\overline{OC} = (-4)$$

L'abscisse d'un point sur un axe est la mesure algébrique du vecteur dont l'origine est l'origine des abscisses et dont l'extrémité est le point considéré.

Eléments qui caractérisent un vecteur : Pour définir un vecteur $\overrightarrow{AB}$ il faut connaître :

1° La droite xy qui le porte ; c'est-à-dire sa direction ou son support,

2° L'origine A de ce vecteur,

3° Son sens sur la droite xy,

4° Sa valeur absolue ou sa longueur AB.

EXERCICES

1. Peut-on mesurer à l'aide des nombres algébriques les grandeurs suivantes : fortune d'une personne, gains d'un joueur, vitesse d'un mobile sur un axe, date d'un événement (après ou avant J.C.) ?

2. Placer sur un axe xy les points suivants donnés par leurs abscisses, exprimées en centimètres : A (+3); B(-2)-, C(-5) ; D(+4).
En déduire les valeurs des mesures algébriques $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$, $\overline{BC}$, $\overline{BD}$, $\overline{CD}$.

3. On place sur un axe xy deux points A et B d'abscisses (+1) et (-3). Quelles sont les abscisses des points qui partagent le segment AB en 8 parties égales ?

4. Soient A et B deux points d'abscisses (-2) et (-5). Quelle est l'abscisse du milieu M de AB ? Quelle est l'abscisse du point N tel que $\overrightarrow{BN} = 2\ \overrightarrow{AN}$?

5 Soit un point A d'abscisse (+5). Quelle est l'abscisse du point A' symétrique de A par rapport à l'origine O des abscisses ? Soit de même B d'abscisse (-3) et B' son symétrique par rapport à O. Evaluer les mesures algébriques $\overline{AB}$ et $\overline{A'B'}$.

ADDITION DES NOMBRES ALGEBRIQUES

8. Somme de deux nombres algébriques. Convenons d'appeler gains positifs les sommes gagnées par un joueur et gains négatifs celles qu'il perd. S'il joue successivement deux parties, leur ensemble se solde par un gain ou une perte que nous appellerons gain total ou somme des deux autres :
1° S'il gagne successivement 8f et 7f, il gagne en définitive 15f, nous écrirons :

$$(+8) + (+7) = (+15)$$

2° S'il perd successivement 8f et 7f, il perd en définitive 15f, nous écrirons :

$$(-8) + (-7) = (-15)$$

3° S'il gagne 12f puis perd 7f, il gagne en définitive 5f, nous écrirons :

$$(+12) + (-7) = (+5)$$

4° S'il perd 12f puis gagne 7f, il perd en définitive 5f, nous écrirons :

$$(-12) + (+7) = (-5)$$

Ces exemples justifient les définitions suivantes :

9. Définitions.
1° La somme de deux nombres algébriques de même signe est un nombre algébrique dont la valeur absolue est la somme de leurs valeurs absolues et dont le signe est leur signe commun.
2° La somme de deux nombres algébriques de signes contraires est un nombre algébrique dont la valeur absolue est la différence de leurs valeurs absolues et dont le signe est celui du nombre qui a la plus grande valeur absolue.
Le signe de l'addition est le signe +.

10. Remarques.
La somme de deux nombres est indépendante de leur ordre :
Ainsi (-23) + (+19) = (+19) + (-23) = (-4)

$$a + b = b + a$$

2° La somme de deux nombres symétriques est le nombre 0.
La somme (+7) + (-7) a pour valeur absolue 7 - 7 = 0, le signe peut être indifféremment + ou -, on écrit donc

$$(+7) + (-7) = 0$$

3° Si l'un des nombres est 0, leur somme est égale à l'autre.
Ainsi (-13) + 0 = (-13),

$$a + 0 = a$$

11. Somme de plusieurs nombres algébriques.

La somme de plusieurs nombres algébriques rangés dans un certain ordre[1] est le nombre algébrique obtenu en ajoutant le premier nombre au second, le nombre obtenu au troisième, et ainsi de suite.
La somme (+13) + (-15) + (-7) + (+3) + (-1) se calcule en disant :
(+13) + (-15) = (-2)
(-2) + (-7) = (-9)
(-9) + (+3) = (-6)
(-6) + (-1) = (-7)
Chacun des nombres est un terme de la somme.
Les propriétés des sommes de nombres algébriques sont les mêmes que celles des sommes arithmétiques : nous nous contenterons de les vérifier.

12. 1e Propriété. - La valeur d'une somme est indépendante de l'ordre de ses termes.
L'avoir d'un commerçant ne varie pas, quel que soit l'ordre dans lequel s'opèrent ses recettes ou ses dépenses :
(-1000) + (+ 800) + (+700) + (-300) =
(+800) + (+700) + (-300) + (-1000) = (+200)

$$a + b + c + d = c + d + b + a$$

13. 2e Propriété. - On ne change pas la valeur d'une somme de plusieurs termes en remplaçant deux ou plusieurs de ces termes par leur somme effectuée.
Ainsi le bilan annuel d'un commerçant peut se calculer en dressant d'abord le bilan de chaque mois puis en faisant leur somme.
Autres exemples :
(-4,5) + (+10) + (-3) + (+2,7) = (-4,5) + (+7) + (+2,7)

$$a + b + c + d + e = a + (b + c + d) + e$$

En particulier :
On peut dans une somme supprimer un groupe de termes dont la somme est nulle :
(-14) + (-5) + (+ 7) + (+5) = (-14) + (+7)
Car les nombres (-5) et (+5) ont une somme nulle.

Pour calculer la somme de plusieurs nombres on peut calculer la somme des termes positifs, puis la somme des termes négatifs, et additionner les deux nombres obtenus.
(-1000) + (+ 800) + (+700) + (-300) = (-1300) + (+1500) = (+200)

14. 3e Propriété. - Pour ajouter une somme, on peut ajouter successivement chacun de ses termes.
$a + (b + c + d) = a + b + c + d$ (2e propriété)
Ainsi :

---

1 La présente éditrice est étonnée de cette mention, inutile puisqu'il est expliqué ensuite que l'addition est commutative et associative.

(+47) + [(-11) + (+7) + (-9)] = (+47) + (-11) + (+7) + (-9)

15. Convention. - Nous conviendrons, dans une somme de nombres algébriques, de supprimer les signes d'addition. Les termes s'écriront ainsi à la suite l'un de l'autre, accompagnés de leurs signes propres. Exemple :
La somme (-5) + (-4) + (+3) s'écrit ainsi :

$$-5-4+3 = -9+3 = -6$$

EXERCICES

Effectuer les additions suivantes :
6. (+3) + (-5) + (-7)
7. (+13) + (+17) + (+15)
8. (-17) + (+14) + (-41)
9. (+3) + (-3) + (+5) + (-5)
10. (-15) + (-30) + (-40)
11. (-100) + (+75) + (+25)

Effectuer les additions suivantes :
12. (-1/4) + (-3/2) + (+5/2)
13. (-5/6) + (+4/9) + (-7/3)
14. (-0,75) + (+4) + (-4/5)
15. (+4/7) + (-13/21) + (+5/6)
16. (-12) + (-11,57) + (+9,87)
17. (-4,51) + (-4/5) + (-7/20)

Effectuer les additions suivantes :
18. -13+15-7-9+3
19. +3/4 - 7/3 + 5/12 + 1
20. -1/2 + 0,4 - 0,7 + 3
21. +1/2 - 4/9 + 5/18 - 7/4
22. +7-9-11+0,75
23. -4 - 7/3 + 7/8

Effectuer les opérations suivantes :
24. (+7-8+4) + (-9-13-1) + (+4-5-7)
25. [(-3) + (-7) + (-1)] + [(-5) + (-9) + (+4)]
26. (13/56 - 3/14 + 5/28) + (4/7 - 3)
27.[(+5-0,7) + (4-0,3)] + [(-13-4,7) + (-3)]

28. Placer sur un axe les points suivants dont les abscisses sont données en centimètres :
A(-3), B(-l), C(+1), D(+2) et E(+5).
Vérifier les égalités avec les mesures algébriques :
AE = AB + BE ; AE = AD + DE ; AE = AB + BC + CE ;
AE = AD + DB + BE ; AE = AB + BC + CD + DE ; AE = AD + DB + BC + CE

SOUSTRACTION DES NOMBRES ALGEBRIQUES

16. Définition. On appelle différence de deux nombres algébriques le nombre qu'il faut ajouter au second pour obtenir le premier.

Comme en arithmétique, on peut écrire indifféremment :

a - b = x	ou	a = b + x

Ainsi
(+17) - (+14) = (+3) car (+14) + (+3) = (+17)
(-16) - (-18) = (+2) car (-18) + (+2) = (-16)
(-7) - (-4) = (-3) car (-4) + (-3) = (-7)

17. Règle. Pour retrancher un nombre algébrique, on ajoute son symétrique.
En effet, soit x la valeur inconnue de la différence (-7) - (-4)
l'égalité (-7) - (-4) = x
entraîne la suivante : x + (-4) = (-7)
Ajoutons (+4) aux deux nombres égaux x + (-4) et (-7) ; nous obtenons encore deux nombres égaux :
x + (-4) + (+4) = (-7) + (+4)
ou (n° 13) x = (-7) + (+4)
Ainsi : (-7) - (-4) = (-7) + (+4)

Au lieu de retrancher (-4) nous pouvons ajouter (+4) ;toute soustraction d'un nombre algébrique peut de la même façon être remplacée par l'addition de son symétrique.

Exemple :
(-10) - (+11) = (-10) + (-11) = (-21)
(+4) - (-9) = (+4) + (+9) = (+13)

18. Conventions. 1° La règle de la soustraction conduit à la convention suivante :
Le symbole -a désigne le symétrique du nombre algébrique a.
Ainsi, soit a = +2, nous écrirons -(+2) = (-2)
soit a = -7, nous écrirons -(-7) = (+7)
2° La différence (+15)-(+7) est égale à la somme (+15) + (-7) que nous écrivons 15-7 = +8. Le symbole +15 - 7 a donc deux significations : addition des nombres +15 et -7, ou soustraction des nombres positifs +15 et +7. Ce symbole conduit à la soustraction arithmétique 15 - 7 = 8, compte tenu de la convention suivante que nous adopterons :
Tout nombre positif peut être remplacé par sa valeur absolue.

On écrit indifféremment +11 ou 11, +3/4 ou 3/4.

19. Sommes algébriques. On appelle somme algébrique une suite de nombres algébriques séparés par les signes + ou -. Chacun de ces nombres est un terme de la somme.

Exemple. La somme algébrique
(-3) + (-5) - (-6) - (+4) + (+7)
se calcule en disant
(-3) + (-5) = (-8)
(-8) -(- 6) = (-2)
(-2) - (+4) = (-6)
(-6) + (+7) = (+1)
Cette somme peut encore s'écrire (règle de la soustraction) :
(-3) + (-5) + (+6) + (-4) + (+7)
ou -3-5+6-4+7 = -3-5-4+6+7 = -12+13 = 1
(dans cette somme chaque terme 6, 7 peut être assimilé à un nombre positif).
La règle de la suppression des parenthèses dans une somme algébrique en résulte :

+ devant + se remplace par +	+(+7) a donné +7
- devant - se remplace par +	-(-6) a donné +6
+ devant - se remplace par -	+(-5) a donné -5
- devant + se remplace par -	-(+4) a donné -4

20. Propriétés des sommes algébriques. Toute somme algébrique peut donc s'écrire sous forme d'un ensemble de nombres arithmétiques séparés par les signes + et -, c'est-à-dire sous forme d'une somme algébrique de nombres arithmétiques, avec cette seule différence que le premier terme peut être précédé de -. Il est donc naturel d'admettre que les propriétés de ces sommes s'appliquent ici :
1° La valeur d'une somme algébrique peut s'obtenir en calculant la somme des termes précédés du signe +, puis la somme des termes précédés du signe -, et en ajoutant les nombres algébriques obtenus.

$$-5+4+8-10+1 = 13-15 = -2$$

2° La valeur d'une somme algébrique est indépendante de l'ordre de ses termes :

$$0,5-4+9-7 = -4+9-7+0,5$$

Le premier terme 0,5 n'étant précédé d'aucun signe, il est positif, on suppose qu'il est précédé de +.
3° Pour ajouter une somme algébrique on peut supprimer les parenthèses précédées du signe +, sans changer les signes :

$$-12 + (-0,5+3-4) = -12-0,5+3-4$$

$$7 + (7-8+1) = 7-7-8+1$$

En général : $$a + (b-c+d) = a+b-c+d$$

4° Pour retrancher une somme algébrique, on peut supprimer les parenthèses précédées de - à

condition de changer les signes qui précèdent chaque terme placé entre ces parenthèses :

-7 - (-8-12+4) = -7+8+12-4

-10 - (5-3+1) = -10-5+3-1

En général : a - (b-c+d) = a-b+c-d

21. Principes relatifs aux égalités.

1° Si deux nombres a et b sont égaux, il en est de même des nombres a+c et b+c, ou des nombres a-c et b-c. Donc :

On peut ajouter un même nombre aux deux membres d'une égalité.

2° Si l'on a a = b

et c = d

on a aussi a + c = b + d

et a - c = b - d

On peut ajouter ou retrancher des égalités membre à membre.

3° Considérons l'égalité (1) a - b = c + d

Ajoutons le nombre (b - d) aux deux membres ; nous obtenons :

a - b + b - d = c + d + b - d

soit : a - d = c + b (2)

Le terme d qui figurait dans le second membre de l'égalité (1) avec le signe + figure dans le premier membre de l'égalité (2) avec le signe - ; tandis que le terme b qui figurait dans le premier membre de l'égalité (1) avec le signe - figure dans le second membre de (2) avec le signe +. Donc :

Dans une égalité on peut faire passer un terme d'un membre dans l'autre à condition de changer le signe qui le précède.

EXERCICES

Calculer :

29. (-15) - (-13)
30. (+4,5) - (+5,49)
31. (+3/4) - (+7/3)
32. (+12) - (+9)
33. (-3,9) - (-7,4)
34. (-3/4) - (-7/9)
35. (+5) - (+17)
36. (-13,75) - (-4,01)
37. (-3/5) - (-1/13)

Calculer la valeur des sommes algébriques suivantes :

38. (-10) + (-15) - (-30) + (+7) - (+12)
39. (-7) - (-9) - (+17) + (-41) + (+1)
40. (+49) - (-63) + (-3) - (+4)
41. (-0,7) - (-0,9) + (-13,5) - (+4)
42. (-1/2) + (-3/4) - (+2/5) - (-1)
43. (-5/11) + (-7/22) - (-4/33) + (-1) - (+0,5)
44. 7-10+14-13-11+3
45. 0,75+4,7-0,7-0,5-1
46. 2/3 - 3/4 + 5/12 - 5/6 - 3

Effectuer les opérations suivantes :

47. (5-3+7-1) + (-9+4-1) - (-3-7+2)
48. (-14+7-3) + (5-7-8) - (-5+4+10)
49. (-2/3 - 3/5 + 1) - (-1/3 + 4/5 -2) + (-1 + 7/3)

Effectuer les opérations suivantes :

50. [(5-9) + (3-5)] - [(7+3-5) - (7-10)]

51. [12 - (14-5+0,75)] + [-15 + (3,25-2)]

52. [1 - (2/5 - 4/3)] - [(4/5 - 1) - (7/5 + 2)]

Supprimer les parenthèses et les crochets dans les expressions suivantes :

53. (a - b + c) - (d - e - f) + (b - a)

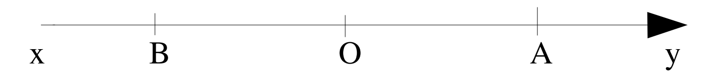
54. [(a - b) - (a - 5)] + [b - 7 - (a - 3)]

55. [12 - (a - b + 6)] - [15 + (b - a - 15)]

56. Quel est l'accroissement de la température indiquée par un thermomètre qui passe de +7° à +13° ; de -3° à +1° ; de -5° à -7° ; de +3° à -1° ?

PRODUITS DE NOMBRES ALGEBRIQUES

22. Produit de deux facteurs. Considérons un point mobile M qui se déplace sur l'axe xy d'un mouvement uniforme : il parcourt des distances égales en des temps égaux ; soit v sa vitesse en centimètres par seconde : en t secondes il parcourt une distance d donnée en centimètres par la formule d = vt. Prenons O comme origine des abscisses ; nous appellerons temps zéro la date à laquelle le mobile M passe en O ; nous appellerons temps positifs les temps postérieurs à cette date et temps négatifs les temps antérieurs à cette date. Nous dirons que M a une vitesse positive s'il se dirige dans le sens xy, une vitesse négative dans le cas contraire. Nous allons étendre la formule d = vt au calcul de l'abscisse du point mobile M.



1er cas. M a une vitesse de (+3) cm/s ; où sera-t-il au temps (+5) s ?
M se dirige dans le sens xy ; il est en O au temps 0. Dans 5 secondes il sera en A tel que OA = 3 × 5 = 15 centimètres ; l'abscisse de A est (+15) ; nous écrivons

$$(+3) \times (+5) = (+15) \text{ ou}$$
$$(+3)\ (+5) = (+15)$$

2e cas. M a une vitesse de (-3) cm/s ; où était-il au temps (-5) s?
M se dirige dans le sens yx ; il est en O au temps 0. Il y a 5 secondes il était en A tel que OA = 15 cm ; on a la mesure algébrique de OA = +15 ; nous écrivons

$$(-3) \times (-5) = (+15)$$

3e cas. M a une vitesse de (+3) cm/s ; où était-il au temps (-5) s ?
M se dirige dans le sens xy ; il y a 5 secondes il était en B tel que OB = 15 cm ; l'abscisse de B est (-15) ; nous écrivons

$$(+3)\ (-5) = (-15)$$

4e cas. M a une vitesse de (-3) cm/s ; où sera-t-il au temps (+5) s?
M se dirige dans le sens yx. Dans 5 secondes il sera en B d'abscisse -15 ; nous écrivons

$$(-3) \times (+5) = (-15)$$

Nous sommes ainsi conduits aux définitions suivantes :

23. Définitions. Le produit de deux nombres algébriques est un nombre algébrique dont la valeur absolue est le produit des valeurs absolues des deux facteurs ; son signe est + si les deux facteurs sont de même signe, - s'ils sont de signes contraires.
Le signe de la multiplication est le signe ×. On peut le supprimer ou le remplacer par un point devant une lettre ou une parenthèse.

$4 \times x$ s'écrit $4x$; $a \times b$ s'écrit ab ou a.b

La règle des signes résulte de ces définitions :

+ par + donne +
- par - donne +
+ par - donne -
- par + donne -

24. Remarques.

1° Si l'un des facteurs est nul, le produit est nul : $a \times 0 = 0$

et réciproquement : si un produit de facteurs est nul, l'un des facteurs au moins est nul, car si aucun n'était nul, le produit ne le serait pas.

2° Le produit de deux facteurs est indépendant de leur ordre :

$$(-5)\ (+7) = (+7)\ (-5) \quad ab = ba$$

3° Si on change le signe d'un facteur on change le signe du produit :

$$(-4)\ (+7) = (-28) \quad \text{et} \quad (-4)\ (-7) = (+28)$$

4° Si on change le signe de deux facteurs, le produit ne change pas :

$$(-4)\ (+7) = (-28) \quad \text{et} \quad (+4)\ (-7) = (-28)$$

5° Multiplication par 1 et par (-1) :

$$(+9)\ (+1) = (+9) \text{ en général } a \times (+1) = a$$

$$(+9)\ (-1) = (-9) \text{ en général } a \times (-1) = -a$$

25. Produit de plusieurs facteurs. Définition.

On appelle produit de plusieurs nombres algébriques rangés dans un certain ordre le nombre algébrique obtenu en multipliant le premier facteur par le deuxième, le nombre obtenu par le troisième et ainsi de suite.

Ainsi le produit (-3) (-4) (+5) (-1)

se calcule en disant

(-3) (-4) = +12 ; (+12)(+5) = +60 ; (+60) (-1) = -60

Il en résulte que la valeur absolue du produit est le produit des valeurs absolues des facteurs. D'autre part, dans le calcul des produits successifs, le produit change de signe quand on rencontre un facteur négatif ; il ne change pas de signe quand on rencontre un facteur positif. Seul, le nombre des facteurs négatifs importe donc pour prévoir le signe du produit cherché :

Le produit est positif si le nombre des facteurs négatifs est pair on zéro. Le produit est négatif si le nombre des facteurs négatifs est impair.

Exemple. (-3) (+2) (-5) (-4) (-1) = +120

(-3) (-2) (-5) (-4) (-1) = -120

Il en résulte que la valeur du produit est indépendante de l'ordre des facteurs.

26. Propriétés des produits. Ce sont les mêmes que celles des produits de nombres arithmétiques.

1° Pour multiplier une somme algébrique par un nombre (ou un nombre par une somme algébrique) on peut multiplier chaque terme de la somme par ce nombre et ajouter les produits obtenus.

Vérifions-le sur les exemples suivants :
(+7+5) (-2) = (-14) +(-10) = -14-10 = -24 = (+12) (-2)
(-13+8) (-3) = (+39) + (-24) = 39-24 = 15 = (-5) (-3)
(-3+4-5) (-4) = +12-16+20 = 16 = (-4) (-4)

En général (a-b+c) x = ax - bx + cx

2° Pour multiplier deux sommes algébriques on peut multiplier chaque terme de l'une par chaque terme de l'autre et ajouter les produits obtenus.
Exemple : (-5+7-1) (-3+4)= 1 × 1 = 1 =
(+15)+(-21) +(+3)+(-20)+(+28)+(-4)=
15-21+3-20+28-4 = 1
En général

(a-b+c) (d-e) =ad-bd+cd-ae+be-ce

3° On ne change pas la valeur d'un produit de facteurs en remplaçant deux ou plusieurs d'entre eux par leur produit effectué.
Exemple : (-3) (-7) (+10) (-1) = (-3) (-70) (-1)

abcde = a (bcd) e

4° Pour multiplier un produit de facteurs par un nombre il suffit de multiplier l'un des facteurs du produit par ce nombre.
Exemples :

[(-2) (+4) (-9)] (-25) = (-2) (-100) (-9)
5a × (-7) = -35a
-12ab × (-1) = +12ab

5° Pour multiplier un nombre par un produit de facteurs on multiplie ce nombre par le premier facteur du produit, puis le résultat obtenu par le second facteur et ainsi de suite jusqu'à épuisement des facteurs du produit.
Exemples :

(-3) [(-5) (+1) (-4)] = (-3) (-5) (+1) (-4)
(-5) × xyz = -5 xyz

6° Pour multiplier entre eux deux produits de facteurs on forme un seul produit contenant tous les facteurs.
Exemples :

[(-2) (+1) (-3)] [(+7) (-9) (+6)] =
(-2) (+1) (-3) (+7) (-9) (+6)
(-3xy) (+7ab) = -21 abxy

27.Priorité du signe × dans une suite d'opérations.
1er exemple : Envisageons la somme de produits suivante :
(-3) (-7) + (-4) (+1) - (+2) (-10)
On doit d'abord effectuer les produits, ce qui donne :

(+21) + (-4) - (-20) = +21-4+20 = +37

2e exemple : (x - y) (c - d) - (x + y) (a + b)

Effectuons les produits (n° 26)

(cx - cy - dx + dy) - (ax + ay + bx + by)

Supprimons les parenthèses (n° 20)

cx - cy - dx + dy - ax - ay - bx - by

EXERCICES

Effectuer :

57. (+17) (-13)
58. (+2/3) (+5/7)
59. (-0,7) (+7/11)
60. (-14) (-11)
61. (-11/11) (-3/4)
62. (-3/2) (-0,5)
63. (+12) (+4)
64. (+5/9) (-7/5)
65. (+0,7) (-4/9)

Effectuer :

66. (-3)(+7)(-5)(+4)
67. (+1,7)(-2,5)(-3)(-1,9)
68. (-1)(+1)(-1)(+1)(-1)(-1)
69. (-3/5)(+3)(-5/3)
70. (+1/2)(-1/4)(-4/8)
71. (+1/2)(-6/11)(-7/8)(-11/15)

Calculer de deux façons différentes les produits suivants :

72. (-5+7-9+1) (-3)
73. (+12-17-9) (+7)
74. (-12+0,7) (+0,5)
75. (-13+11,7+12,5) (-4,7)
76. (-1/2 + 2/3 + 3/5) (-4)
77. (-3/5 + 7/9 - 11/13) (+2/3)
78. (-5+12-7) (5-7)
79. (3/5 - 4/15) (2/7 - 3/14)
80. (+5+14-13) (-7-2)
81. (11/12 - 1) (11/12 + 1)
82. (-3,5+2,7+4,9) (0,75-1)
83. (5/9 - 7/27) (1 - 3/5)

Effectuer le plus rapidement possible les opérations suivantes :

84. (5-3+2) (12-9) + (15-17) (7-10)
85. (7-17) (10-12) - (15-17) (-14+11)
86. (2,5+0,7) (7,9-8) - 0,5(11-8)
87. (2/3 + 3/5 - 1) (1 - 7/9) + 4/5 (17 - 1/3)
88. [(5-11) - (17-14)] [12 - (14-11)] + 13 (17-12)
89. [14 - (0,7-1)] [0,5 + (1/2 - 3)] - {12 - (2,4+4,1)] [(1,7+2,3) - 1]

90. La vitesse d'un point mobile sur un axe est +4 cm/s. Quelles sont les abscisses de ce point aux temps +3 et +7 ? Quelle est la valeur algébrique du vecteur joignant les deux positions de ce point aux temps considérés ? Même question si la vitesse est -4 cm/s.

91. Au temps +5 l'abscisse d'un mobile est -16 cm ; au temps -3 elle était +8. Quelle est la vitesse de ce mobile sachant qu'il est animé d'un mouvement uniforme ?

DIVISION DES NOMBRES ALGEBRIQUES

28. Définition. On appelle quotient de a par b le nombre algébrique x dont le produit par b est égal à a.

On écrit : a : b = x ou $\boxed{\frac{a}{b}=x}$ ce qui signifie $a = bx$

Le symbole $\frac{a}{b}$ se nomme fraction algébrique ou rapport des nombres *a* et *b ; a* est le numérateur, *b* est le dénominateur, *a* et *b* sont les deux termes du rapport.

Exemples :

$$\frac{+28}{+4}=+7 \quad \text{car } (+4)\ (+7) = (+28)$$

$$\frac{-28}{-4}=+7 \quad \text{car } (-4)\ (+7) = (-28)$$

$$\frac{+28}{-4}=-7 \quad \text{car } (-4)\ (-7) = (+28)$$

$$\frac{-28}{+4}=-7 \quad \text{car } (+4)\ (-7) = (-28)$$

Il en résulte la règle suivante :

29. Règle. Le quotient de deux nombres algébriques est un nombre algébrique dont la valeur absolue est le quotient des valeurs absolues du dividende et du diviseur, et dont le signe est + si ces deux nombres ont même signe, - s'ils sont de signes contraires.

30.Remarques.

1° La division d'un nombre non nul par 0 est impossible.

Si l'on avait a : 0 = x, on aurait a = 0 × x. donc a = 0

2° Le quotient de 1 par un nombre algébrique est l'inverse de ce nombre.

L'inverse de (-5) est $\frac{1}{-5} = -\frac{1}{5}$

L'inverse de (+3/4) est $\frac{1}{+(\frac{3}{4})} = +\frac{4}{3}$

3° Diviser un nombre par a c'est le multiplier par l'inverse de a.

Ainsi $\frac{+7}{-9}=-(\frac{7}{9}) = (+7)\times(-(\frac{1}{9}))$; or $-(\frac{1}{9})$ est l'inverse de (-9).

or $\frac{-5}{4}$ est l'inverse de $\frac{-4}{5}$

Toute division est ainsi remplacée par une multiplication.

En général $\frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b}$

31.Quotient d'une somme algébrique par un nombre.
Cherchons le quotient de (-5+7-8) par -3 ; nous avons

$$\frac{-5+7-8}{-3} = (-5+7-8)\times(-\frac{1}{3}) = \frac{5}{3} - \frac{7}{3} + \frac{8}{3} = \frac{-6}{-3} = \frac{+6}{+3} = +2$$

Donc :
Pour diviser une somme algébrique par un nombre on peut diviser chaque terme de la somme algébrique par ce nombre et ajouter les quotients obtenus.

En général $\frac{a-b+c}{x} = \frac{a}{x} - \frac{b}{x} + \frac{c}{x}$

32.Applications aux égalités.
1° Si deux nombres a et b sont égaux, on obtient encore deux nombres égaux en multipliant ou en divisant a et b par un même nombre c.
L'égalité a = b entraîne les suivantes :

$$ac = bc$$
$$\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$$ (c différent de zéro)

On peut multiplier les deux membres d'une égalité par un même nombre. On peut diviser les deux membres d'une égalité par un même nombre différent de zéro.

En particulier, on peut changer de signe chacun des deux membres (multiplication par -1) ; -x = 5 donne x = -5.

2° Les égalités a = b ; c = d entraînent les deux suivantes :

$$ac = bd \quad \text{et} \quad \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$$

On peut multiplier ou diviser membre à membre deux égalités.

PROPRIETES DES RAPPORTS

33.Propriété fondamentale. On ne change pas la valeur d'un rapport en multipliant ou en divisant

ses deux termes par un même nombre.
En effet soit x la valeur du quotient a/b. On a (n° 28)

$$a = bx$$

Multiplions les deux membres de cette égalité par n :
an = bxn ou (n° 26) an = (bn) x
donc

$$\frac{an}{bn} = x \qquad \text{et} \qquad \boxed{\frac{a}{b} = \frac{an}{bn}}$$

Les rapports peuvent être simplifiés :

exemples : $\frac{0{,}36}{4} = \frac{36}{400} = \frac{9}{100}$

$$\frac{\frac{+2}{3}}{\frac{-5}{3}} = \frac{+2}{-5} \; ; \; \frac{(-5a)}{(25b)} = \frac{(-a)}{(5b)}$$

Ils peuvent être réduits au même dénominateur :

exemples : $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$; on a $\frac{a}{b} = \frac{ad}{bd}$ et $\frac{c}{d} = \frac{bc}{bd}$

$\frac{-7}{x}$ et $\frac{+5}{y}$; on a $\frac{-7}{x} = \frac{(-7y)}{xy}$ et $\frac{+5}{y} = \frac{(+5x)}{xy}$

34. Somme algébrique de rapports. On réduit les rapports au même dénominateur ; on calcule la somme algébrique des numérateurs obtenus, et on conserve le dénominateur commun.
Exemples :

1° $\frac{+3}{-5} - \frac{-2}{+7} + \frac{-1}{+35} = \frac{-21}{+35} - \frac{-10}{+35} + \frac{-1}{+35} = \frac{(-21+10-1)}{+35}$

2° $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} - 1 = \frac{ay}{xy} + \frac{bx}{xy} - \frac{xy}{xy} = \frac{(ay+bx-xy)}{xy}$

35. Produits de rapports. On multiplie les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux.

$$\frac{-2}{+5} \times \frac{-4}{+7} \times \frac{+1}{-3} = \frac{((-2)(-4)(+1))}{((+5)(+7)(-3))} = \frac{+8}{-105}$$

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} \times \frac{e}{f} = \frac{ace}{bdf}$$

36. Quotient de deux rapports. On multiplie le rapport dividende par l'inverse du rapport diviseur.

$$\frac{-7}{+4} : \frac{+6}{-11} = \frac{-7}{+4} \times \frac{-11}{+6} = \frac{+77}{+24}$$

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

EXERCICES

Effectuer les divisions suivantes :

92. (+56) : (+7)
93. (-56) : (-8)
94. (+64) : (-16)
95. (-360) : (+12)
96. (+105) : (-7)
97. (-286) : (-13)
98. (+221) : (-17)
99. (-286) : (-11)
100. (+96) : (+8)

101. $(+15) : (-\frac{2}{3})$
102. $(-7{,}5) : (-\frac{4}{5})$
103. $(-1) : (+\frac{3}{4})$
104. $(-\frac{4}{5}) : (+1{,}4)$
105. $(+\frac{3}{4}) : (-\frac{15}{8})$
106. $(-\frac{7}{3}) : (+\frac{5}{3})$
107. $(+1) : (+\frac{2}{3})$
108. $(-\frac{8}{25}) : (-\frac{14}{5})$
109. $(+\frac{1}{3}) : (-\frac{1}{4})$

110. $\frac{(-12+4-72)}{4}$
111. $\frac{(+35-75+25)}{5}$
112. $\frac{(-12+144-108)}{-12}$
113. $\frac{(7-0{,}5+2)}{-2}$
114. $\frac{(9+13-15)}{-11}$
115. $\frac{(-11+10-7{,}8)}{5}$

Simplifier les rapports suivants et trouver leur valeur :

116. $\frac{-63}{70}$
117. $\frac{-308}{-484}$
118. $\frac{273}{468}$
119. $\frac{48}{-96}$
120. $\frac{-169}{-26}$

Effectuer les opérations suivantes :

121. $\frac{(-3+\frac{3}{4}-\frac{1}{3})}{(5+\frac{2}{5}-\frac{2}{3})}$
122. $\frac{(7-\frac{3}{2}+\frac{3}{8})}{(2-\frac{5}{2}-\frac{3}{4})}$
123. $\frac{(1-\frac{5}{7}-\frac{4}{9})}{(1-\frac{5}{3}-\frac{7}{15})}$
124. $\frac{(-3-0{,}5-0{,}75)}{(\frac{-2}{3}-\frac{3}{4})}$

125. $\frac{(-3+5-6)}{(2+7-1)}$ $\frac{(4-3+1)}{(2-3-1)}$ $\frac{(-5-7)}{10}$

126. $\frac{(\frac{1}{2}-\frac{2}{3})}{(\frac{3}{4}-1)}$ $\frac{(\frac{5}{6}+\frac{1}{3})}{(1-\frac{4}{5})}$ $\frac{(\frac{-7}{8}+1)}{(\frac{3}{2})}$

127. $\dfrac{0,5}{(\frac{3}{5}-2)} + \dfrac{1}{(4-\frac{11}{7})} - \dfrac{3}{(-7+\frac{1}{3})}$

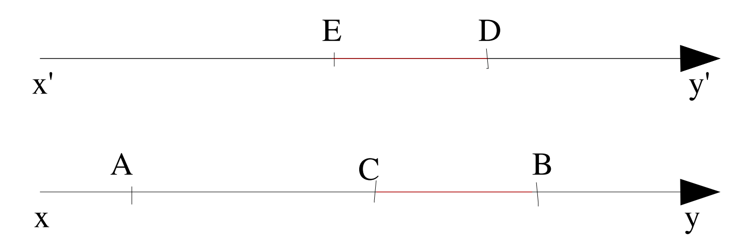
128. $3-\dfrac{(1-\frac{1}{2})}{(1+\frac{1}{2})}$

129. $\dfrac{\frac{2}{5}}{\frac{2}{3}-\frac{4}{5}} - \dfrac{\frac{-1}{2}}{\frac{-1}{3}+1} + \dfrac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{16}-2}$

130. $\dfrac{1-\frac{1}{3}+\dfrac{1}{1+\frac{1}{3}}}{1-\frac{1}{3}-\dfrac{1}{1+\frac{1}{3}}}$

RELATION DE CHASLES

37. Somme de deux vecteurs portés par un même axe ou des axes parallèles.
Considérons les deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DE}$ (figure 3) portés par les axes parallèles xy et x'y'. Construisons par l'extrémité B du premier un vecteur $\overrightarrow{BC}$ parallèle à $\overrightarrow{DE}$, de même sens et de même longueur : C se place sur l'axe xy puisque les directions xy et x'y' sont parallèles. Le vecteur $\overrightarrow{BC}$ est dit égal au vecteur $\overrightarrow{DE}$ et le vecteur $\overrightarrow{AC}$ est par définition la somme des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DE}$ ou $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$.



Deux vecteurs sont égaux s'ils ont même direction, même sens et même longueur.
Pour former la somme de deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DE}$ de supports parallèles ou de même support, on mène par l'extrémité B du premier vecteur un vecteur $\overrightarrow{BC}$ égal au second. Le vecteur $\overrightarrow{AC}$ qui joint l'origine du premier à l'extrémité du dernier est la somme cherchée.
On écrit $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DE}$ ou $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$
Nous nous limiterons au cas de deux vecteurs consécutifs tels que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ portés par un même axe.

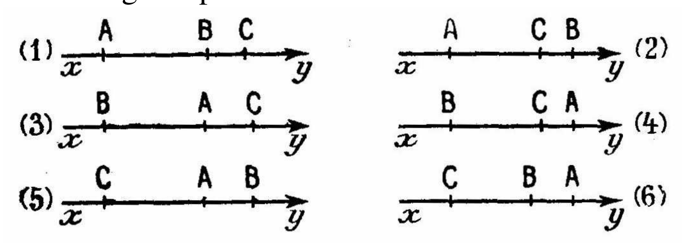
38. Théorème I. La mesure algébrique de la somme de deux vecteurs consécutifs portés par un même axe est égale à la somme des mesures algébriques de ces vecteurs.
Rappelons que $\overline{AB}$ désigne le nombre algébrique qui mesure $\overrightarrow{AB}$ sur l'axe xy. Il s'agit de montrer que l'égalité de vecteurs

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$$

entraîne l'égalité algébrique suivante :

$$\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC} \quad \text{(relation de Chasles)}$$

Observons qu'il existe 6 cas de figures possibles.



Démontrons le théorème dans le 4e cas de figure où l'on a, entre les nombres arithmétiques BA, BC

et CA l'égalité : CA = BA - BC
Tout nombre arithmétique est identique au nombre positif de même valeur absolue (n° 18).
On peut donc remplacer BA, BC et CA par $\overline{BA}$, $\overline{BC}$ et $\overline{CA}$; ainsi
$\overline{CA} = \overline{BA} - \overline{BC}$
ou (n° 21) $- \overline{BA} + \overline{BC} =- \overline{CA}$

Or $- \overline{BA}$ désigne (n° 7) le symétrique du nombre algébrique $\overline{BA}$, c'est-à-dire le nombre $\overline{AB}$; de même $- \overline{CA}$ est identique à $\overline{AC}$; on a donc

$$\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$$

Vérification : Si $\overline{AB}$ =(-7) et $\overline{BC}$ = (+ 4), on a $\overline{AC}$ =-3
et (-3) = (-7) + (+4)
On pourra vérifier qu'il en est de même dans les autres cas.

Remarque. Il faut trois égalités arithmétiques pour traduire, selon le cas, la position relative de 3 points en ligne droite ; ce sont :
AC = AB + BC, AC = AB - BC ou AC = BC - AB
Au contraire, la relation de Chasles est absolument indépendante de l'ordre dans lequel sont placés les trois points A, B et C.
On écrirait de même si M, N, P sont trois points d'un axe

$$\overline{MP} = \overline{MN} + \overline{NP}$$

(On intercale la lettre N entre les lettres M et P qui figurent dans le 1er membre.)

39. Théorème II. La mesure algébrique d'un vecteur porté par un axe est égale à l'abscisse de son extrémité diminuée de l'abscisse de son origine.
Soient sur l'axe xy (fig. 5) les points A d'abscisse (+2) et B d'abscisse (-3) on a $\overline{AB}$ = -5.

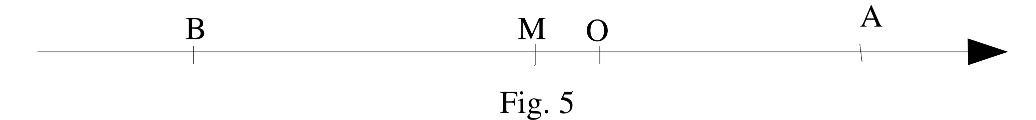


Fig. 5

Or (-5)=(-3)-(+2)
Nous vérifions que la mesure algébrique de $\overrightarrow{AB}$ est égale à l'abscisse de son extrémité B diminuée de l'abscisse de son origine A.
Démontrons qu'il en est toujours ainsi. D'après le théorème I, on a $\overline{AB} = \overline{AO} + \overline{OB} = \overline{OB} + \overline{AO}$
$= \overline{OB} - \overline{OA}$ (car $+ \overline{AO} =- \overline{OA}$)
Soit b l'abscisse de B, a celle de A ; on a dans tous les cas :

$$\overline{AB} = b-a$$

Exemple. L'échelle du thermomètre peut être assimilée à un axe ; la variation de température est alors égale à la température finale moins la température initiale ; si le thermomètre indique (+3) à midi et (-5) à minuit la variation de température de midi à minuit est de :(-5)-(+3)=-8 degrés.

40. Abscisse du milieu d'un segment.

Considérons les points A et B (fig. 5) d'abscisses +2 et -3 ; soit M le milieu de AB ; on a AM = BM = 2,5 ; donc

OM = 0,5 et $\overline{OM}$ =-0,5

Or, -0,5 = $\frac{((+2)+(-3))}{2}$

et donc

$$\overline{OM} = \frac{(\overline{OA}+\overline{OB})}{2}$$

Démontrons que cette formule est générale ; quelle que soit la disposition des points O, A, B sur l'axe xy, on a d'après le théorème de Chasles

$$\overline{OM} = \overline{OA} + \overline{AM}$$
$$\overline{OM} = \overline{OB} + \overline{BM}$$

Additionnons membre à membre ces deux égalités :

$$2\ \overline{OM} = \overline{OA} + \overline{OB} + \overline{AM} + \overline{BM}$$

or $\overline{AM}$ et $\overline{BM}$ sont deux nombres symétriques, leur somme est nulle ; donc

$2\ \overline{OM} = \overline{OA} + \overline{OB}$

et $\overline{OM} = \frac{(\overline{OA}+\overline{OB})}{2}$

Soient a, b, m les abscisses des points A, B, M, on a

$$m = \frac{(a+b)}{2}$$

Le milieu d'un segment a pour abscisse la demi-somme des abscisses des extrémités de ce segment.

EXERCICES

131. Vérifier la relation $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}$, les points A, B, C appartenant à un axe xy, dans les cas suivants où les abscisses de A, B, C sont respectivement :

0, +3, +5 ; 0, -2, -4 ; 0, +7, +2 ; 0, -5, -3 ; 0, +2, -3 ; 0, -3, +2.

132. Soit un axe xy, O l'origine des abscisses, vérifier la relation a $\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA}$ dans les cas suivants où les abscisses de A et B sont respectivement :

+3, +5 ; -2, -4 ; +7, +2 ; -5, -3 ; +2, -3 ; -3, +2.

133. Soient A et B deux points d'un axe, M le milieu de AB, vérifier la relation

$\overline{OM} = \frac{(\overline{OA}+\overline{OB})}{2}$, dans les cas suivants où les abscisses de A et B sont respectivement :

+5, +9 ; -5, +9 ; -5, -9 ; -9, +5.

134. Soient sur un axe xy les points A, B, C, D d'abscisses +2, +4, -1, -3. Vérifier la relation $\overline{AD} = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD}$; en est-il ainsi quelle que soit la disposition des points ?

135. Soient 4 points A, B, C, D ; démontrer la relation

$\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DA} = 0.$

136. Calculer le nombre d'années qui s'est écoulé entre les dates suivantes : 51 ans avant JC et 800 ans après JC. Généraliser avec des dates a et b.

137. Soient A et B d'abscisses +4 et -3. Déterminer les abscisses des points C et D qui partagent AB en 3 parties égales. Généraliser en désignant par a et b les abscisses de A et B.

138. Soient 4 points A, B, C, D dont les abscisses sont +2, -3, -1, +4. Vérifier la relation

$\overline{DA} \cdot \overline{BC} + \overline{DB} \cdot \overline{CA} + \overline{DC} \cdot \overline{AB} = 0.$

En est-il toujours ainsi lorsqu'on désigne par a, b, c, d les abscisses de A, B, C, D ?

PUISSANCES

41. Définition. On appelle puissance d'un nombre le produit de plusieurs facteurs égaux à ce nombre.
Ainsi (-3)(-3)(-3)(-3)(-3) s'écrit $(-3)^5$ et se lit "-3 puissance 5".
Le nombre entier 5 est l'exposant de la puissance ; il indique que le produit contient 5 facteurs égaux à (-3).
En général
$a^n = a \times a \times a \times a \times a \times .... \times a$ (se lit "a puissance n") (n facteurs)
a^2 se lit "a au carré"
a^3 se lit "a au cube"
Il résulte de cette définition que toute puissance d'un nombre positif est un nombre positif.

42. Puissances d'un nombre négatif.
1° On a $(-3)^5 = (-3)(-3)(-3)(-3)(-3)$. Sa valeur absolue est $3)^5 = 243$; son signe est - car le nombre de facteurs négatifs est impair, donc $(-3)^5 = -243$.
Ainsi : toute puissance d'exposant impair d'un nombre négatif est un nombre négatif.
Autre exemple : $(-1)^{27} = -1$.
2° $(-3)^4 = (-3)(-3)(-3)(-3)$. Sa valeur absolue est 81 ; son signe est + car le nombre de facteurs négatifs est pair, donc $(-3)^4 = +81$.
Ainsi : toute puissance d'exposant pair d'un nombre négatif est un nombre positif.
Autre exemple : $(-1)^{44} = +1$.
En particulier : le carré d'un nombre algébrique est toujours un nombre positif.
$(+7)^2 = +49$ et $(-7)^2 = +49$
Deux nombres symétriques ont le même carré.

43. Produit de deux puissances d'un même nombre.
Soit à calculer $a^5 \times a^3$
On a $a^5 = a \times a \times a \times a \times a$ et $a^3 = a \times a \times a$
Donc $a^5 \times a^3 = a \times a \times a \times a \times a \times a \times a \times a = a^8 = a^{5+3}$
De façon générale :

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

44. Quotient de deux puissances d'un même nombre.
L'égalité $a^8 = a^5 \times a^3$
entraîne la suivante : $\frac{a^8}{a^5} = a^3$

Le quotient de deux puissances d'un même nombre est une puissance de ce nombre dont l'exposant est la différence des exposants du dividende et du diviseur.

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

Exemple $\frac{(-3)^7}{(-3)^4} = (-3)^3$

Exposant zéro. Nous avons supposé dans l'exemple précédent m > n. Supposons que l'on ait m = n.
Exemple $\frac{7^5}{7^5} = 7^{5-5} = 7^0 = 1$

Le quotient d'un nombre par lui-même est 1, donc la puissance 0 d'un nombre quelconque est égale à 1.

Exposant négatif. Supposons que l'on ait m < n.
Exemple $\frac{(-3)^4}{(-3)^9}$

Cette fraction peut être simplifiée par $(-3)^4$: $\frac{(-3)^4}{(-3)^9} = \frac{1}{(-3)^5}$

Mais l'application de la règle précédente donne : $\frac{(-3)^4}{(-3)^9} = \frac{1}{(-3)^5} = (-3)^{-5}$

Nous conviendrons donc que $\frac{1}{a^n} = a^{-n}$

45. Puissance d'une puissance.

Calculons $(a^3)^4$; on a (n° 43)
$(a^3)^4 = a^3 \times a^3 \times a^3 \times a^3 = a^{12}$
Donc $(a^3)^4 = a^{3\times4}$
En général

$$(a^m)^p = a^{mp}$$

La puissance d'une puissance d'un nombre est une puissance de ce nombre dont l'exposant est le produit des deux exposants.
Exemple : $[(-5)^2]^3 = (-5)^6$

46. Puissance d'un produit.

On a : $(abc)^3 = (abc)(abc)(abc) = a^3 b^3 c^3$
En général

$$(abc)^m = a^m b^m c^m$$

Pour élever un produit de facteurs à une puissance, on peut élever chaque facteur du produit à cette puissance.
Exemples : $[(-3)(+2)(-7)]^2 = (-3)^2 (+2)^2 (-7)^2$
$= (+42)^2 = (+1764) = (+9)(+4)(+49)$
$(7xy)^3 = 7^3 x^3 y^3 = 343 x^3 y^3$

47. Puissance d'un rapport.

On a $\left(\frac{a}{b}\right)^4 = \left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{(aaaa)}{(bbbb)} = \frac{a^4}{b^4}$

Donc de façon générale :

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

Pour élever un rapport à une puissance, on peut élever les deux termes de ce rapport à cette puissance.

Exemples : $\left[\frac{(+1)}{(-3)}\right]^2 = \frac{(+1)^2}{(-3)^2} = \frac{1}{9}$; $\left(\frac{(3x)}{(2y)}\right)^2 = \frac{(9x^2)}{(4y^2)}$

48. Racine carrée d'un nombre algébrique.

On appelle racine carrée d'un nombre algébrique A tout nombre a dont le carré est égal à A.

Si a² = A, a est la racine carrée de A.

Or, a² est un nombre positif (n° 42) : il en est donc de même de A. Ainsi : un nombre négatif n'a pas de racine carrée.

Les égalités (+5)² = 25 et (-5)² = 25 montrent que le nombre +25 a deux racines carrées symétriques.

On écrit $+5 = +\sqrt{25}$ et $-5 = -\sqrt{25}$

Le symbole √ s'appelle un radical et se lit "racine carrée de ...". $\sqrt{A}$ désigne la racine carrée arithmétique ou la racine carrée positive du nombre positif A.

EXERCICES

139. Calculer les puissances d'exposant 2, 3, 4, 5 des nombres suivants : (+1), (+3), (+5), (-2), (-4), (-5).

140. Calculer : $(-11)^3$; (+9)² ; $(-10)^5$; $(+7)^4$; $(-13)^4$

141. Calculer :

$\left(\frac{-1}{2}\right)^4$; $\left(\frac{-1}{2}\right)^5$; $\left(\frac{+2}{3}\right)^2$; $\left(\frac{-3}{4}\right)^3$; (+4)² ; (-0,25)²

142. Calculer :

53×5^2 ; $(-7) \times (-7)^2$; $\frac{+2}{3} \times \left(\frac{+2}{3}\right)^3$; $\left[\left(\frac{-1}{4}\right)^2\right]^2 \times [(-2)^2]^3$

Calculer :

143. [(-1) (+2) (-3)] ²

144. $[(+1)(-3)(-5)]^3$

145. [(+2) (-2) (-3)] ²

146. $\left[\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{-1}{3}\right)\left(\frac{-1}{5}\right)\right]^2$

147. $\left[(-5)\left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{+1}{3}\right)\right]^3$

148. $\left[(-0,5)(+0,75)\left(\frac{+1}{2}\right)\right]^3$

149. $(-5)^7 : (-5)^3$; $(+0{,}01)^3 : (+0{,}01)$; $\left(\frac{-4}{5}\right)^2 : \left(\frac{-4}{5}\right)^3$; $4^3 : 4^6$; $(-2{,}5)^2 : (-2{,}5)^3$; $\left(\frac{2}{3}\right)^3 : \left(\frac{2}{3}\right)^6$

150. Calculer la valeur de $x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$ pour x valant successivement : 3 ; -2 ; $\frac{1}{3}$; -0,5.

151. Calculer la valeur de $x^3 - 3x^2 + 5x - 7$ pour x valant successivement : 4 ; -1 ; $\frac{2}{3}$; $\frac{-2}{3}$

152. Calculer la valeur de $\frac{(x^3-1)}{(x^2+1)}$ pour x valant successivement : 1 ; -1 ; $\frac{1}{4}$; $\frac{-1}{4}$

153. Calculer la valeur de $a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$

1° pour a = +2 et b = -3 ; 2° pour a = b = -0,5.

154. Calculer la valeur de $\frac{(3xy)}{(x^2+y^2)} - \frac{(x-y)}{(x+y)}$

1° pour x = 1 et y = -2 ; 2° pour x = -0,5 et y = +0,25.

155. Soient 3 points A, B, C d'abscisses +2, -1, -3 sur un axe où O est l'origine des abscisses. Vérifier la relation avec les mesures algébriques :

$OA^2 . BC + OB^2 . CA + OC^2 . AB + AB . BC . CA = 0$

156. Sur un axe où O est l'origine des abscisses, sont placés trois points A, B, M d'abscisses +3, -3, +1. Vérifier les relations avec les mesures algébriques :

$MA . MB = MO^2 - OA^2$

$MA^2 + MB^2 = 2\ MO^2 + 2\ OA^2$

$MA^2 - MB^2 = 2\ AB . OM$.

INEGALITES

49. Définitions.
On dit qu'un nombre a est plus grand qu'un nombre b si la différence a - b est un nombre positif.
On écrit a > b.
Si la différence a - b est positive, la différence b - a est négative, car les nombres a - b et b - a sont symétriques. Ainsi, un nombre b est plus petit qu'un nombre a si la différence b - a est négative, on écrit b < a.
a > b et b < a sont des inégalités. Ce qui est écrit à gauche du signe < ou > est le premier membre, ce qui est écrit à droite est le second membre.
Il résulte de la définition que :
1° Tout nombre positif est plus grand que zéro : (+7) - 0 = (+7), donc (+7) > 0. Nous remplacerons "a positif" par "a > 0".
2° Tout nombre négatif est plus petit que zéro : 0 - (-3) = 0 + (+3) = (+3), donc 0 > (-3) ou (-3) < 0. Nous remplacerons "a négatif" par "a < 0".
3° Tout nombre positif est supérieur à tout nombre négatif : (+1) - (-9) = (+1) + (+9) = (+10), donc (+1) > (-9).
4° De deux nombres positifs, le plus grand est celui qui a la plus grande valeur absolue :
(+15) - (+12) = 15 - 12 = (+3), donc (+15) > (+12)
5° De deux nombres négatifs, le plus grand est celui qui a la plus petite valeur absolue :
(-5) - (-8) = -5 + 8 = +3, donc (-5) > (-8).
Remarque. Les inégalités a > b et c > d sont dites de même sens ; les inégalités a > b et d < c sont de sens contraires.

50. Position d'un point par rapport à un segment. Soit un axe xy orienté dans le sens de la flèche et O l'origine des abscisses sur cet axe.
Plaçons les points A d'abscisse (+3) et B d'abscisse (-1).



Tout point C d'abscisse supérieure à (+3) se place extérieurement au segment AB et sur la demi-droite Ay. Tout point D d'abscisse inférieure à (-1) se place extérieurement au segment AB et sur la demi-droite Bx. Tout point E dont l'abscisse est comprise entre (-1) et (+3), c'est-à-dire plus grande que (-1) et plus petite que (+3) se place à l'intérieur du segment AB.
Réciproquement, si un point est à l'extérieur du segment AB, son abscisse x vérifie l'une ou l'autre des inégalités x > (+3) ou x < (-1). Si un point est intérieur au segment AB, son abscisse x vérifie la double inégalité -1 < x < +3.
L'abscisse d'un point mobile sur l'axe xy augmente ou croît si ce point se déplace dans le sens x → y et elle diminue ou décroît si ce point se déplace dans le sens contraire.

51. Théorème I.

On peut ajouter ou retrancher un même nombre aux deux membres d'une inégalité.

Soit $a > b$, c'est-à-dire $a - b > 0$.

La différence $(a + c) - (b + c)$ est égale à $(a - b)$ (n° 21), donc

$(a + c) - (b + c) > 0$, soit $a + c > b + c$.

On peut donc ajouter le nombre c (ou retrancher le nombre -c) aux deux membres de l'inégalité $a > b$.

Exemple : Soit

$$x + 5 > -y - 7$$

Ajoutons le nombre $y - 5$ aux deux membres :

$$(x + 5) + (y - 5) > (-y - 7) + (y - 5)$$

soit

$$x + y > -12$$

Les termes -y et +5 ont ainsi changé de membre et sont devenus +y et -5. Donc :

Dans une inégalité on peut faire passer un terme d'un membre dans l'autre à condition de changer le signe qui le précède.

52. Théorème II. On peut ajouter membre à membre des inégalités de même sens.

Les inégalités $a > b$; $c > d$; $e > f$ sont de même sens. Elles signifient que les nombres $(a - b)$, $(c - d)$, $(e - f)$ sont positifs ; la somme de ces trois nombres est elle-même positive, donc

$$(a - b) + (c - d) + (e - f) > 0$$

ou

$$a - b + c - d + e - f > 0$$

soit

$$(a + c + e) - (b + d + f) > 0$$

ce qui entraîne :

$$a + c + e > b + d + f$$

On peut remarquer que le théorème subsiste si l'une des inégalités est remplacée par une égalité :

si on a : $a > b$; $c = d$; $e > f$, on a aussi : $a + c + e > b + d + f$

Théorème III. On peut multiplier ou diviser les deux membres d'une inégalité par un même nombre positif en conservant le sens de cette inégalité.

On peut multiplier ou diviser les deux membres d'une inégalité par un même nombre négatif à condition de changer le sens de l'inégalité.

1° Soit $a > b$, ce qui signifie $a - b > 0$.

Multiplions le nombre positif $(a - b)$ par un nombre positif p ; le produit est positif. Donc :

$p (a - b) > 0$ ou $pa - pb > 0$

Donc $pa > pb$ inégalité de même sens que la première.

Exemples : soit $-7 > -8$; multiplions les deux membres par (+2), nous obtenons : $-14 > -16$

Soit encore $+\dfrac{5}{3} > -\dfrac{7}{2}$; multiplions les deux membres par +6 : $+10 > -21$.

2° Soit $a > b$ ce qui signifie $a - b > 0$.

Multiplions le nombre positif (a - b) par le nombre négatif n ; le produit est négatif. Donc :

$n(a - b) < 0$ ou $na - nb < 0$ ou $na < nb$, inégalité de sens contraire à la première.

Exemples : soit $\dfrac{x}{-4} < \dfrac{1}{2}$.

Multiplions les deux membres par -4, nous obtenons : $x > -2$.

Soit de même : $-x < -5$.

Multiplions les deux membres de l'inégalité par -1, nous obtenons

$$x > 5.$$

Remarque. Multiplier les deux membres d'une inégalité par -1 revient à changer de signe ses deux membres. Donc : Si on change les signes des deux membres d'une inégalité, il faut aussi changer le sens.

EXERCICES

Comparer les nombres algébriques suivants :

157. +2 et -5 ; $\dfrac{+1}{4}$ et $\dfrac{-5}{4}$; +3 et 0 ; 0 et -9.

158. +7 et +6 ; -5 et -9 ; -3 et -3,5 ; -0,54 et -0,57.

159. $\dfrac{+3}{4}$ et $\dfrac{+2}{3}$; $\dfrac{-3}{5}$ et $\dfrac{-5}{7}$; -3 et $\dfrac{-17}{3}$; -5 et $\dfrac{-15}{2}$.

160. +2,54 et $\dfrac{+17}{8}$; -1,3 et $\dfrac{-9}{7}$; $\dfrac{-11}{12}$ et $\dfrac{-12}{13}$; $\dfrac{+34}{43}$ et $\dfrac{+35}{44}$.

161. Quels sont les nombres x qui vérifient à la fois les deux inégalités suivantes: $x < 3$ et $x < -1$? Interprétation graphique : comparer la position sur un axe du point M d'abscisse x par rapport aux points d'abscisses +3 et -1.

162. Quels sont les nombres x qui vérifient à la fois $x < -1$ et $x > -5$? Interprétation graphique.

163. Existe-t-il des nombres x qui vérifient à la fois les deux inégalités $x > 0$ et $x < -2$? Interprétation graphique.

164. Quels sont les nombres x qui vérifient à la fois :

1° la double inégalité $2 < x < 6$,

2° l'une des inégalités $x < 3$ ou $x > 5$? Interprétation graphique.

165. Existe-t-il des nombres x qui vérifient à la fois :

1° la double inégalité $-2 < x < -1$,

2° l'une ou l'autre des inégalités $x < -4$ ou $x > 0$?

166. Quels sont les nombres x qui vérifient à la fois les inégalités suivantes : $x > 0$; $x < 5$; $x < 3$ et $x > 2$? Interprétation graphique.

167. Quels sont les nombres x qui vérifient à la fois :

1° la double inégalité $\frac{-2}{5} < x < \frac{2}{3}$,

2° l'une ou l'autre des inégalités $x > \frac{2}{9}$ ou $x < \frac{-5}{12}$? Interprétation graphique.

EXPRESSIONS ALGEBRIQUES

54. Définition. Une expression algébrique est un ensemble de nombres donnés ou représentés par des lettres, sur lesquels sont indiquées des opérations à effectuer.

Exemples : $2ax^2 - 3bx$; $\frac{x^2-4}{x-2}$; $a - \sqrt{b^2-c^2}$

Une expression algébrique est rationnelle si elle ne contient pas de lettres sous un radical ; sinon elle est irrationnelle.

Une expression algébrique est entière si elle ne contient pas de dénominateur littéral ; dans le cas contraire elle est fractionnaire.

$\frac{2}{3}a^2 - b\sqrt{3}$ est une expression entière.

$\frac{1}{x+3}$ est une fraction rationnelle.

$2x + \sqrt{x^2+7}$ est une expression irrationnelle.

55. Valeurs numériques d'une expression algébrique.

La valeur numérique d'une expression algébrique, pour un ensemble de valeurs attribuées aux lettres qui y figurent, s'obtient en remplaçant chaque lettre par sa valeur et en effectuant les opérations indiquées.

Ainsi pour a = 4 et b = -5, l'expression $\frac{2a(a-b)}{3}$ a pour valeur numérique

$$\frac{2 \times 4(4+5)}{3} = 24$$

Parfois il est impossible de calculer la valeur numérique d'une expression. Ainsi pour x = 1, les expressions $\frac{x+1}{x-1}$ et $\sqrt{x-2}$ n'ont pas de valeur numérique.

Lorsque deux expressions ont même valeur numérique quelles que soient les valeurs attribuées aux lettres, elles sont équivalentes.

(a+b) x et ax + bx sont deux expressions équivalentes.

56. Calcul algébrique. Le calcul algébrique a pour but la transformation des expressions algébriques en expressions équivalentes.

Simplifier ou réduire une expression, c'est l'écrire sous une forme équivalente plus simple, et par conséquent plus facile à calculer numériquement.

MONÔMES

57. Définition. Un monôme est une expression algébrique dans laquelle les seules opérations à effectuer sur les lettres sont des multiplications ou des élévations à une puissance.

Ainsi $\frac{7}{2}$ $a^2 b^3 x$, $-a^2 (-4) b^2 (-c). (2+ \frac{3}{4})a^2 x (-y)$

sont des monômes.

La valeur numérique d'un monôme peut toujours se calculer, quelles que soient les valeurs attribuées aux lettres.

Pour a = -2, b = 3, x = -1, le monôme $\frac{7}{2} a^2 b^3 x$ a pour valeur numérique :

$\frac{7}{2} \times (-2)^2 \times 3^3 \times (-1) = -\frac{7}{2} \times 4 \times 27 \times 1 = -378.$

58. **Réduction d'un monôme.** Soit le monôme

$$(-4)a^2b^2 (\frac{1}{3})a b^3x^2$$

Nous pouvons modifier l'ordre des facteurs, puis remplacer plusieurs d'entre eux par leur produit effectué. Nous obtenons :

$$(-4) \times \frac{1}{3} \times a^2a \times b^2b^3 \times x^2 = \frac{-4}{3} a^3 b^5 x^2$$

Le monôme a été réduit :

$a^3 b^5 x^2$ est la partie littérale du monôme,

$\frac{-4}{3}$ est le coefficient numérique du monôme.

Il faut éviter de confondre, dans un monôme réduit, le coefficient avec l'exposant de l'une des lettres.

Le coefficient numérique n'est pas toujours apparent :

a^2xy a pour coefficient +1,

$-a^2by$ a pour coefficient -1.

59. Monômes identiques.

Lorsque deux monômes sont équivalents, ils ont la même forme réduite. On dit alors qu'ils sont identiques : ils ont même partie littérale et même coefficient.

Ainsi les monômes

$$(-2) ab (\frac{1}{3}) b^3 x^2 \quad \text{et} \quad a (+4)b^2 (\frac{-1}{6}) b^2x^2$$

se réduisent tous deux à $\frac{-2}{3} a b^4 x^2$

donc ils sont identiques.

60. Monômes semblables.

Deux monômes sont semblables lorsqu'ils ont la même partie littérale.

Ainsi $15\ a^3\ b^5\ x^2$, $-7\ a^3\ b^5\ x^2$, $\frac{-2}{3}\ a^3\ b^5\ x^2$ sont semblables.

61. Somme algébrique de monômes semblables.

Considérons la somme de plusieurs monômes semblables :

$$4\ a^2x^3y - \frac{5}{2}\ a^2x^3y + \frac{3}{4}\ a^2x^3y$$

Cette somme est le développement du produit équivalent

$$(4 - \frac{5}{2} + \frac{3}{4})\ a^2x^3y$$

obtenu en mettant entre les parenthèses la somme des coefficients.

La somme algébrique proposée est donc égale à

$$\frac{9}{4}\ a^2x^3y$$

La somme algébrique de plusieurs monômes semblables est un monôme semblable dont le coefficient est égal à la somme algébrique des coefficients des monômes considérés.

62. Degré d'un monôme.

On appelle degré d'un monôme par rapport à une lettre l'exposant de cette lettre dans le monôme.

$\frac{9}{4}\ a^2x^3y$ est du second degré en a, du troisième en x et du premier en y.

On appelle degré d'un monôme par rapport à plusieurs lettres la somme des degrés par rapport à chacune de ces lettres.

Le monôme précédent est du 5e degré en a et x, du 6e degré en a, x et y (ou : par rapport à l'ensemble de ses variables).

EXERCICES

Calculer la valeur numérique des expressions suivantes, pour les valeurs successives des lettres :

168 . $3a^2 - 2a + 5$ (+4 ; -2 ; -1)

169. $3x^2 - 5x + 7$ (+3 ; +5 ; -3)

170. $4x^3 - 12x^2 - 4x + 7$ (+5 ; -3 ; +3/2)

171. $\frac{7x^2}{2} - \frac{8x-6}{3} + \frac{3x+7}{4}$ (+3 ; -2 ; +5)

172. $(x^2 + 1)^2 - x^4 - 2x^2$ (-1 ; +1/2 ; -1/2)

173. $\frac{7-3x}{12} + \frac{2(x-2)}{3} + \frac{5}{4}$ (+4 ; +2 ; -3)

174. $(a^2 + 1)(a^2 - 1) + 4a^2$ (-2 ; +3 ; -1/3)

175. $\frac{(x+y)^2-(x^2+y^2)}{xy}$ (x = -5 et y = +2)

176. $\frac{a^2-ab}{a^2-2ab+b^2}$ (a = +7 et b = -2)

177. Vérifier que pour a = -5 et b = +3, les expressions suivantes ont même valeur numérique :

$a^2 - ab + b^2$; $\frac{a^3+b^3}{a+b}$; $(a + b)^2 - 3ab$

178. Même exercice pour a = 4 et b = -3 avec les expressions

$(a + b)^2 (a - b)$; $(a^2 - b^2)(a + b)$; $\frac{a^4+b^4-2a^2b^2}{a-b}$

179. Peut-on calculer pour a = +5 et b = -2 la valeur numérique de l'expression $\frac{a^2+2ab-3b^2}{a(a-1)-5b^2}$?

180. Même exercice pour a = 1 et b = 2 avec l'expression $\frac{3a^2+5b^2}{4a^2-b^2}$

Réduire les monômes suivants et calculer leur valeur numérique :

181. $(-2/3)a^2x \times (-3y) \times (2/5)$ pour a = -3 ; x = +2 ; y = -1.

182. $xy \times (-2/3)\, x^2 \times (3/4)\, a^2$; pour a = 5 ; x = -2 ; y = +3.

183. $(2/7)\, a^2\, (-3/4)\, xy^3\, (-2/5)\, a^2x$; pour a = 3,5 ; x = 3 ; y = -2.

184. $(-3/5)\, a^2 \times (2/3)\, b^2x \times (-x^4)$; pour a = 4 ; b - (-1) ; x = -2.

185. $4x^3 \times (-3y^2) \times (-5/6)\, a^2x^2y^5$; pour a = -1/2 ; x = +4 ; y = 3/2.

Effectuer les sommes de monômes suivantes :

186. $(2/3)\, ax - (1/2)\, ax + (3/4)\, ax - (5/6)\, ax$.

187. $(-3/5)\, a^2bx + (1/4)\, a^2bx - (7/2)\, a^2bx + (1/10)\, a^2bx$

188. $(-4/7)\, a^2b^3x + (5/2)\, a^2b^3x - (5/4)\, a^2b^3x$

189. $(3/4)\, a^2b^3x^4y - (2/3)\, a^2b^3x^4y + (1/6)\, a^2b^3x^4y$.

190. Dire quels sont les degrés des monômes suivants,

1° par rapport à la lettre x, puis par rapport à y,

2° par rapport à x et y, puis par rapport à l'ensemble des variables :

$(-2/3)\, a^2x$; $(3/4)\, ab^3x^2$; $(-5/2)\, a^4b^5y$; $(-7/5)\, a^6x^3y$.

POLYNÔMES

63. Définition. Un polynôme est une somme algébrique de plusieurs monômes.
Chacun des monômes constitue un terme du polynôme.
Exemples : $3a^2b - ab^2 - 2/5\, a^3 + 4b^2$

$$2x - x^3 + 5 - 4/3\, x^2$$

Lorsqu'un polynôme contient seulement deux termes, on l'appelle un binôme ; s'il en contient trois, c'est un trinôme. $2x^2 - 5x$ est un binôme ; $4x^2 - 3x + 5$ est un trinôme.
La valeur numérique d'un polynôme s'obtient en faisant la somme des valeurs numériques de chaque monôme. Pour $x = -2$, le trinôme $2x^2 - 3x + 1$ est égal à :
$2(-2)^2 - 3(-2) + 1 = 8 + 6 + 1 = 15$

64. Réduction d'un polynôme. Considérons le polynôme

$$7x^3 + 8x - 3 + 4x - 2x^3 - 5x + 2$$

Groupons les termes semblables et remplaçons chacun de ces groupes par le monôme équivalent, nous obtenons :

$$7x^3 - 2x^3 + 8x + 4x - 5x - 3 + 2 =$$
$$(7 - 2)\, x^3 + (8 + 4 - 5)\, x - 1 =$$
$$5\, x^3 + 7\, x - 1$$

Le polynôme ainsi obtenu est équivalent au polynôme proposé et ne contient plus de termes semblables. On dit que le polynôme a été réduit.

65. Polynômes identiques. Lorsque deux polynômes se composent, après réduction, des mêmes termes, on dit qu'ils sont identiques.
Les polynômes $-3 + x^2 - 5x$ et $-5x - 3 + x^2$ sont identiques.
On démontre que deux polynômes équivalents sont identiques.

66. Degré d'un polynôme. Le degré d'un polynôme réduit, par rapport à une lettre (ou à plusieurs lettres) est le degré du monôme de plus haut degré par rapport à cette lettre (ou à ces lettres).
$2x - 3 + 4x^2$ est du second degré en x.
$x^6y^3 - 3x^4y^5 - 2xy^4$ est de degré 6 en x, 5 en y et de degré 9 par rapport à l'ensemble des lettres.
Contrairement à ce qui se passe pour un monôme le degré par rapport à deux lettres n'est pas obligatoirement la somme des degrés par rapport à chacune de ces lettres.
Lorsque tous les termes d'un polynôme ont le même degré par rapport à plusieurs lettres, on dit que le polynôme est homogène par rapport à ces lettres :
$2x^3 - 4xy^2 + x^2y$ est homogène de degré 3 en x et y.

67. Polynômes ordonnés. Considérons un polynôme à une seule variable, c'est-à-dire contenant une seule lettre :

$$3x^2 - 2x + 4 - 5x^3$$

Il est logique (et commode) d'écrire les termes de ce polynôme de façon que leurs degrés aillent soit en augmentant soit en diminuant :

$$4 - 2x + 3x^2 - 5x^3 \quad \text{ou} \quad - 5x^3 + 3x^2 - 2x + 4 :$$

le polynôme est ordonné en croissant dans le premier cas, en décroissant dans le second. Le degré du polynôme est ainsi immédiatement visible.
Un polynôme est complet s'il y figure un terme de chaque degré. Le polynôme incomplet du 3e degré $x^3 - 2x + 1$ peut d'ailleurs s'écrire $x^3 + 0x^2 - 2x + 1$.
Un polynôme à plusieurs variables peut être ordonné par rapport à l'une d'elles :
$x^2y - 3xy + 4x - 2$ est ordonné en décroissant en x.
$2x^3 - 3x^2y - 4xy^2 + y^3$ est un polynôme homogène du 3e degré en x et y, ordonné simultanément en décroissant en x et en croissant en y.

68. Somme de polynômes. Soit à additionner les polynômes
$a^2 + 5a - 7b$; $6a^2 + 3b -2$ et $- 4a^2 +5b -3$.
La somme s'écrit : $(a^2 + 5a - 7b) + (6a^2 + 3b -2) + (- 4a^2 +5b -3)$
laquelle peut s'écrire : $a^2 + 5a - 7b + 6a^2 + 3b - 2 - 4a^2 +5b -3$.
La somme de plusieurs polynômes est équivalente au polynôme formé de tous les termes de ces polynômes.
Nous pouvons réduire le résultat : $3a^2 + 5a + b - 5$.

69. Différence de deux polynômes.
La différence des polynômes $a^2 + 5a - 7b$ et $6a^2 + 3b -2$ s'écrit :
$(a^2 + 5a - 7b) - (6a^2 + 3b -2)$
qui peut s'écrire :
$a^2 + 5a - 7b - 6a^2 - 3b +2$, formé en supprimant les parenthèses.
D'où la règle : pour retrancher un polynôme, il suffit d'ajouter le polynôme symétrique obtenu en changeant tous les signes.
Une somme algébrique de polynômes est ainsi ramenée à une suite d'additions.

70. Somme algébrique de polynômes à une variable.
Il est bon dans ce cas d'ordonner ces polynômes et de les compléter s'il y a lieu. On peut alors les disposer comme pour une addition de nombres l'un en-dessous de l'autre, en faisant correspondre verticalement les termes semblables.
Exemple. Soient les polynômes
$A = 2 - 5x + 4x^3$; $B = -8x + 4x^2 + 6$; $C = -2x^3 + 3 + x^2 + 2x$.
Pour calculer la somme algébrique A - B + C, on écrit

A =	$+4x^3$		$-5x$	$+2$
- B =		$-4x^2$	$+8x$	-6
C =	$-2x^3$	$+x^2$	$+2x$	$+3$
S =	$2x^3$	$-3x^2$	$+5x$	-1

La réduction des termes semblables est immédiate et le résultat est ordonné.

EXERCICES

Réduire et ordonner les polynômes suivants :

191. $(-3/2)\,x + (5/4)\,x - 3x^2 + x/6 - (5/2)\,x^2 + 5 + 4x^2$
192. $(3/2)\,x^2 + xy + y^2 - 2xy + x^2/3 - (3/2)\,x^2$
193. $4a^2 - (2/3)\,a - (2/5)\,a^2 + (1/3)\,a - 5a - (2/15)\,a^2$
194. $3x^2 + (4/5) - (5/3)\,x - 2x^2 - (3/5)\,x^3 + 4 - 2x^2 + 7x$
195. $4x^2 - (7/2) + (3/5)\,x - (5/2)\,x^2 + (4/3)\,x^3 - 5 + (3/2)\,x^3 + 7 - 2x$
196. $(2/5)\,a^2b + 3a^3 - 4\,ab^2 + (5/2)\,a^2b + (7/2)\,b^3 - b^3 + 2ab^2$
197. Soient les deux polynômes $A = 3x^2 - 7x^3 - 2x + 2$
et $B = 4x - 6x^2 + 5x^3 -2$.
Calculer A + B. Vérifier en calculant les valeurs numériques de A, B et A + B pour $x = 2$.
198. Mêmes données que pour l'exercice précédent, former A - B, vérifier pour $x = 3$.

Réduire les expressions suivantes :

199. $(-5x^4 + 3 - (4/5)x^3) + ((-2/3)x^3 - 2x) - (7x^2 - (4/5)x + 5x^4)$
200. $(12\,x^3 + 2x^2 - 5x + 13) + (3x + 5 - 4x^3) - (5x^3 - 8 + 2x^2)$
201. $(a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3) + (a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3) - (6ab^2 - 3a^3)$

Effectuer :

202. $(3x - 5) + [2x - 5 - (3x - 2y + 4) - (4x - 3y - 9)]$
203. $(2x - 5y + 7) - [(3x + 2y - 3) - (4x + 4y - 2)] - [2x - (3y + 4)]$
204. $[(x - 2y + 5) - (3x + 2y + 7)] - [(2x + 3) - (4y - 2)]$
205. Soient les polynômes
$A = 3x^2 - 4x + 5$; $B = 2x^2 + 5x - 4$; $C = 4x^2 - x + 3$
Former les polynômes A + B + C ; A + B - C ; A - B + C ; -A + B + C.
206. Soient les polynômes $A = 5a^2 - 3ab + 7b^2$; $B = 6a^2 - 8ab + 9\,b^2$; $C = 4a^2 - 3ab - 7b^2$.
Former les polynômes A - B - C ; -A + B + C ; - A +B - C.
207. Soient les polynômes $P = 2x^5 - 3x^2 + 4x$; $Q = 4x^3 - 5x^2 + 2x - 1$; $R = 4\,x^5 - 2x^3 + 3x - 1$;
$S = 3x^2 + 2x - 5$.
Former les polynômes (P + Q) - (R + S) ; (P - Q) + (R - S) ; P - Q - R + S.

MULTIPLICATION DES MONÔMES ET DES POLYNÔMES

71. Produit de deux monômes. Soient les monômes

$$A = 3/5\ a\ x^3\ y^2 \quad \text{et} \quad B = -2\ a^4\ x^5$$

Le produit des deux monômes s'écrit

$$A.B = (3/5\ a\ x^3\ y^2) \times (-2\ a^4\ x^5)$$

Pour multiplier deux produits, nous pouvons former le produit unique contenant tous les facteurs de ces deux produits. Nous obtenons :

$$A.B = 3/5\ a\ x^3\ y^2\ (-2)\ a^4\ x^5$$

soit en réduisant :

$$A.B = -\ 6/5\ a^5\ x^8\ y^2$$

D'où la règle :

Le produit de deux monômes est un monôme dont :

1° le coefficient est le produit des deux coefficients,

2° la partie littérale est formée des lettres contenues dans les deux monômes, chacune d'entre elles ayant pour exposant la somme des exposants dans chacun des facteurs.

Remarquons que cette règle s'étend immédiatement au produit de plusieurs monômes.

Exemple :

$$(3/4\ a^2x^3y) \times (-2/5\ ay^4) \times (2x^5y^2) = -3/4 \times 2/5 \times 2\ \ a^2x^3y\ .\ ay^4\ .\ x^5y^2 \quad = -3/5\ a^2x^8y^7$$

72. Carré d'un monôme. Soit le monôme $-2/3\ a\ x^4y^3$. Nous obtenons immédiatement :

$$(-2/3\ a\ x^4y^3)^2 = (-2/3\ a\ x^4y^3) \times (-2/3\ a\ x^4y^3) = (-2/3)^2\ a^2x^8y^6\ = 4/9\ a^2x^8y^6$$

Pour obtenir le carré d'un monôme, il suffit de prendre le carré du coefficient et de doubler l'exposant de chaque lettre.

On obtiendrait de même le cube du monôme précédent :

$$(-2/3\ a\ x^4y^3)^3 = -8/27\ a^3\ x^{12}\ y^9$$

73. Produit d'un polynôme par un monôme. Soit à effectuer le produit :

$$(a^2x^3 - 5x + 3a)\ (-2a^3x)$$

En supposant les différents termes remplacés par des valeurs numériques, nous avons à multiplier une somme par un nombre. Ce produit est donc équivalent au polynôme :

$$(a^2x^3)\ (-2a^3x) + (-\ 5x)\ (-2a^3x) + (3a)\ (-2a^3x)$$
$$= -2\ a^5x^4 + 10\ a^3x^2 - 6\ a^4x$$

74. Produit de deux polynômes. Soit à calculer :

$$(3x^2 - 2x + y)\ (3x - y)$$

En supposant les différents termes remplacés par des valeurs numériques, nous avons à effectuer le produit de deux sommes, et nous voyons que ce produit a la même valeur numérique que le polynôme :

$$(3x^2)(3x) + (-2x)(3x) + (y)(3x) + (3x^2)(-y) + (-2x)(-y) + (y)(-y)$$

soit :

$$9x^3 - 6x^2 + 3xy - 3x^2y + 2xy - y^2$$
$$= 9x^3 - 3x^2y + 5xy - 6x^2 - y^2$$

75. Produit de deux polynômes à une seule variable.

Soient les polynômes $A = 3x^3 - 2 + 5x$ et $B = 2x^2 - 4x + 3$

Pour effectuer leur produit, on les écrit en les ordonnant l'un au-dessous de l'autre et on calcule les produits partiels du premier par chacun des termes du second en disposant les résultats comme pour l'addition.

$A =$	$3x^3$		$+ 5x$	-2		
$B =$		$2x^2$	$- 4x$	$+ 3$		
$A \times 2x^2 =$	$6x^5$		$+ 10\,x^3$	$- 4x^2$		
$A \times (-4x) =$		$-12\,x^4$		$-20\,x^2$	$+ 8x$	
$A \times 3 =$			$9\,x^3$		$+ 15\,x$	-6
$A \times B =$	$6x^5$	$-12\,x^4$	$+ 19\,x^3$	$- 24\,x^2$	$+ 23\,x$	-6

On obtient immédiatement le résultat réduit et ordonné. Remarquons d'autre part que le degré du produit est la somme des degrés de chacun des facteurs.

76. Produit de plusieurs polynômes. Soit à effectuer le produit des trois polynômes suivants :

$A = 3x^2 - 1$ $B = 2x + 1$ $C = 4x^2 - 2x + 1$

On calcule $A.B = (3x^2 - 1)(2x + 1) = 6x^3 + 3x^2 - 2x - 1$

Puis $(A.B) . C = (6x^3 + 3x^2 - 2x - 1)(4x^2 - 2x + 1)$

On trouve $A.B.C = 24\,x^5 - 8x^3 + 3x^2 - 1$

le produit est indépendant de l'ordre des facteurs et on peut par suite remplacer deux polynômes par leur produit effectué. Le degré du produit est la somme des degrés de chaque facteur.

77. Carré, cube d'un polynôme. Soit le polynôme $2x - y$.

$(2x - y)^2 = (2x - y)(2x - y) = 4x^2 - 2xy - 2xy + y^2 = 4x^2 - 4xy + y^2$

Nous obtenons de même

$(2x - y)^3 = (2x - y)^2 . (2x - y) = (4x^2 - 4xy + y^2)(2x - y)$

soit après développement : $8x^3 - 12x^2y + 6xy^2 - y^3$

78. Exemple de calcul pratique.

Soit à calculer l'expression $A = 3(2x - 3)(3x + 2) - 2(x + 4)(4x - 3) + 9x(4 - x)$

Cette expression est une somme de produits. Il faut calculer d'abord chacun de ces produits :

$3(2x - 3)(3x + 2) = (6x - 9)(3x + 2) = 18x^2 - 15x - 18$

$- 2(x + 4) (4x - 3) = (-2x - 8)(4x - 3) = -8x^2 - 26x + 24$

$9x(4 - x) = 36x - 9x^2$

L'expression A est donc égale à

	$18x^2$	$- 15x$	-18
	$-8x^2$	$- 26x$	$+ 24$
	$- 9x^2$	$+ 36x$	
A =	x^2	$- 5x$	$+ 6$

EXERCICES

Effectuer les produits suivants :

208. $(3a^2b^3) (2/3\ ab^5)$
209. $(4/5\ a^3b^2c) (-3/4\ abc^4)$
210. $(4/7\ a^2xy^3) (-5/2\ a^3y^4)$
211. $(-3/4\ x^2y) (+3/5\ a^3y^5)$
212. $(9/4\ a^4x^2y^3) (-4/3\ ax^2)$
213. $(14/3\ a^2b^3x) (-6/7\ a^2b^5)$
214. $(-7/2\ ax^2y) (-8/15\ b^3xy^2) (5/21\ abx^3)$
215. $(5/12\ a^4b^2x) (-2/7\ ax^2y^3) (-14/5\ b^3xy^4)$

Calculer les expressions suivantes :

216. $(-2/5\ ab^3)^2$
217. $(5/3\ a^2b^3x^4)^2$
218. $(-3/2\ a^4b^3y^2)^3$
219. $(7/2\ a^3b^5x^3)^2$
220. $(-9/4\ a^4b^2x^5)^2$
221. $(-6/5\ ax^4y^5)^3$

Effectuer les produits suivants :

222. $(3/2\ a^2b - 5/4\ ab + 3a) (-4/3\ a^2b^3)$
223. $(5/4\ ax^2 + 3/2\ bx - 4c) (-4/5\ abx^5)$
224. $(2/5\ a^2x -3\ ay -4\ by) (4a^3x^2y)$
225. $(-3/2\ x^5 + 15/4\ x^3 - 2/5\ x) (-20/3\ x^4)$
226. $(2x - 3y) (4x - 2)$
227. $(2a + 3b) (-4a + 6b)$
228. $(-4x + 3y + 1) (y - 3)$
229. $(-2a + 3b - 5) (a - b)$
230. $(2x^3 - 3y^2 + 5) (x^2 - y)$
231. $(4a^3 - 5b^4 + ab) (a^2 - b)$
232. $(5xy + 3x - 2y) (2x - y)$
233. $(-3xy +4x - 2y) (x + 5)$
234. $(14a^2b + 5a^2 - b) (a^2 - 2b)$
235. $(7a^3b - 4b^2 + 2a^3) (2a^3 + 4b^2)$

236. Soient les polynômes $A = -2x^2 + 3x + 5$ et $B = x^2 - x + 3$.
1° Calculer le produit A.B.
2° Vérifier pour $x = -3$ en calculant les valeurs numériques de A, de B et de A.B.

237. Soit le polynôme $A = x^2 - 3x +2$.
1° Calculer le carré puis le cube de ce polynôme.
2° Vérifier pour $x = -4$, en calculant les valeurs numériques du polynôme et des résultats trouvés.

Effectuer les produits suivants, réduire et ordonner les résultats :

238. $(2x - 7) (-3x + 2)$
239. $(4x^5 + 7 -2x^3) (x^3 - 2x)$

240. $(5x^3 - 2x)(3x - 4x^2)$

241. $(2x - 7x^2 + 5x^3)(3x - 5x^2 + 8)$

242. $(-2x + 3/2)(4x + 3)$

243. $(8/3\ x - 3/2\ x^2 + 5)(4x^3 - 5x^2 + 7)$

244. $(7x^4 - 2x^3 + 4x^2)(3x^2 - 5)$

245. $(2x^2 - 4x^3)(x^2 - 2x)$

246. $(2x^2 - 4 + 2x)(x^2 + 5 - 2x)$

247. $(5/4\ x^3 - 2x + 1/2)(7/2\ x^3 - 2/3\ x + x^2)$

Calculer les expressions suivantes :

248. $(2x + 3)(3x - 2)(x - 4)$

249. $(5x - 1)(2x + 3)(7 + 4x)$

250. $(3x^2 - 1)(x + 1)(x - 1)$

251. $(x - 3/5)(5x^2 - 1)(5x + 3)$

252. $(2x^2 + 3x - 4)^2$

253. $(4x^3 - 7x + 2x^2 + 5)^2$

254. $(7x - 5)^3$

255. $(x^2 - x + 2)^3$

Développer et réduire les expressions suivantes :

256. $5(3a^2 - 4b^3) - [9(2a^2 - b^3) - 2(a^2 - 5b^3)]$

257. $3a^2(2b - 1) - [2a^2(5b - 3) - 2b(3a^2 + 1)]$

258. $(2a + 5b)(3a - 2b) - (2a - 1)(3a + 2b) - (a - 2b)(5b - 1)$

259. $(2x - 3y)(5x - 2y) - (3x - 2y)(2x + 1) - (5x - y)(3y + 1)$

260. $(ax^2 - b)(ax^2 - 2b) + 3b(ax^2 - b) + b(b - 1)$

261. $(x - 1)(x - 2)(x - 3) + 6(x - 1)(x - 2) + 7(x - 1)$

262. $(x^2 + y^2)(x^2 - y^2)(x - y) + xy(x^3 + y^3)$

263. $2/3\ x^2y(2x^2 - y/3) - 2x^2(2x^2 - 1) + (2x^2 - y/3)(1 - y/3)(2x^2 - 1)$

IDENTITES REMARQUABLES

79. Définition. Une identité est l'égalité de deux expressions algébriques équivalentes.
Une identité est donc vérifiée quelles que soient les valeurs attribuées aux lettres. Ces lettres pourront d'ailleurs représenter indifféremment des nombres ou des expressions algébriques.

80. Carré de la somme de deux termes. Soit à calculer $(a + b)^2$:
$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + ab + ba + b^2$
en réduisant nous obtenons l'identité :

$$\mathbf{(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$$

Applications. 1° Calculer $(3x + 5)^2$.
Remplaçons dans l'identité a par 3x et b par 5, nous obtenons :
$(3x + 5)^2 = (3x)^2 + 2 \times 3x \times 5 + 5^2 = 9x^2 + 30x + 25$
2° $(2x^2 + 3y)^2 = (2x^2)^2 + 2 \times 2x^2 \times 3y + (3y)^2 = 4x^4 + 12x^2y + 9y^2$
3° $(2/5\ ax^2 + 3/4\ by)^2 = (2/5\ ax^2)^2 + 2 \times (2/5\ ax^2) \times (3/4\ by) + (3/4\ by)^2$
$= 4/25\ a^2x^4 + 3/5\ abx^2y + 9/16\ b^2y^2$.

81. Carré de la différence de deux termes.
$(a - b)^2 = (a - b)(a - b) = a^2 - ab - ba + b^2$
soit

$$\mathbf{(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2}$$

Remarquons que cette identité est une conséquence de la première, en remplaçant +b par -b, et par suite +2ab par -2ab. Le terme $+b^2$ ne change pas car $(-b)^2 = b^2$.
Exemples :
1° Calculer $(2x - 3)^2 = (2x)^2 - 2 \times 2x \times 3 + 3^2 = 4x^2 - 12x + 9$.
Ce résultat s'obtient aussi en remplaçant dans la première identité a par 2x et b par -3 :
$(2x - 3)^2 = (2x)^2 + 2 \times 2x \times (-3) + (-3)^2 = 4x^2 - 12x + 9$.
2° $(3x^2 - 2/5\ y^3)^2 = (3x^2)^2 - 2 \times 3x^2 \times 2/5\ y^3 + (2/5\ y^3)^2 = 9x^4 - 12/5\ x^2y^3 + 4/25\ y^6$

82. Produit de la somme de deux nombres par leur différence.
Soit à calculer $(a + b)(a - b)$, nous obtenons :
$a^2 + ab - ab - b^2$
ou en réduisant :

$$\mathbf{(a + b)(a - b) = a^2 - b^2}$$

Exemples :
1° $(2x + 5)(2x - 5) = (2x)^2 - 5^2 = 4x^2 - 25$
2° $(4a^2x + 2/3\ y)(4a^2x - 2/3\ y) = (4a^2x)^2 - (2/3\ y)^2 = 16\ a^4x^2 - 4/9\ y^2$

83. Autres identités. Les identités suivantes pourront être vérifiées à titre d'exercices :

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2bc + 2ca + 2ab$$
$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$
$$(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$$
$$(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$$
$$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab.$$

Il suffit d'effectuer les calculs indiqués dans le premier membre pour obtenir le second. Signalons aussi les identités suivantes qui sont des conséquences des identités (1) et (2) :

$$(a + b)^2 + (a - b)^2 = 2(a^2 + b^2)$$
$$(a + b)^2 - (a - b)^2 = 4ab.$$

84. Sommes de plusieurs termes.

1° Soit à calculer $(2x - 3y + 5)^2$.

Si on ne veut pas employer la première identité du n° 83, on peut écrire :

$(2x - 3y + 5)^2 = [(2x - 3y) + 5]^2 = (2x - 3y)^2 + 10(2x - 3y) + 25$

$= 4x^2 - 12xy + 9y^2 + 20x - 30y + 25$

2° Soit à calculer $(2a + 5b + 3)(2a + 5b - 3)$

Ce produit équivaut à :

$[(2a + 5b) + 3][(2a + 5b) - 3] = (2a + 5b)^2 - 3^2$

soit $4a^2 - 20ab + 25b^2 - 9$.

85. Applications au calcul mental.

1° Carré d'un nombre terminé par 1 ou 9 :

$41^2 = (40 + 1)^2 = 1600 + 80 + 1 = 1681$.

$29^2 = (30 - 1)^2 = 900 - 60 + 1 = 841$.

2° Carré d'un nombre terminé par 5 :

soit d le nombre de dizaines ; le nombre considéré s'écrit $10d + 5$.

$(10d + 5)^2 = 100d^2 + 100d + 25 = 100d(d+1) + 25$

soit

$$(10d + 5)^2 = d(d+1) \text{ centaines} + 25 \text{ unités}$$

On voit ainsi que

$$75^2 = 7 \times 8 \text{ centaines} + 25 = 5625$$
$$125^2 = 12 \times 13 \text{ centaines} + 25 = 15\,625$$

3° Produit de deux nombres différents.

$32 \times 28 = (30 + 2)(30 - 2) = 900 - 4 = 896$

$28 \times 22 = (25 + 3)(25 - 3) = 625 - 9 = 616$

$57 \times 43 = (50 + 7)(50 - 7) = 2500 - 49 = 2451$

EXERCICES

Vérifier les identités suivantes :

264. $1/2\ (a + b)^2 + 1/2\ (a - b)^2 = a^2 + b^2$

265. $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = ab$

266. $(a - b)\ (a^3 + a^2b + ab^2 + b^3) = a^4 - b^4$

267. $(a + b)\ (a^3 - a^2b + ab^2 - b^3) = a^4 - b^4$

268. $(x^2 + x + 1)\ (x^2 - x + 1) = x^4 + x^2 + 1$

269. $(aa' + bb')^2 + (ab' - a'b)^2 = (a^2 + b^2)\ (a'^2 + b'^2)$

270. $(x - 1)\ (x + 1)\ (x^2 + 1) = (x - 1)\ (x^3 + x^2 + x + 1) = x^4 - 1$

271. $a\ (b - c) + b\ (c - a) + c\ (a - b) = 0$

272. $a\ (bz - cy) + b\ (cx - az) + c\ (ay - bx) = 0$

273. $(x + y)^3 - 3xy(x + y) = x^3 + y^3$

274. $(x + y)^3 + 2(x^3 + y^3) = 3\ (x + y)\ (x^2 + y^2)$

Utiliser les identités classiques pour développer les produits suivants :

275. $(3/2\ x^3 - 2/5\ y^2)^2$

276. $(4/3\ x^5 + 2/5\ y^3)^2$

277. $(2/5\ x^2 - 3/4\ y)\ (2/5\ x^2 + 3/4\ y)$

278. $(2/3\ a^2x^3 - 1/2\ by^4)\ (2/3\ a^2x^3 + 1/2\ by^4)$

279. $(3x + 4y - 5)\ (3x + 4y + 5)$

280. $(2/3\ x - 4/5\ y - 1)\ (2/3\ x + 4/5\ y + 1)$

281. $(3x + 4y - 2z)^2$

282. $(5/2\ x - 3/4\ y + z)^2$

Développer et réduire les expressions suivantes :

283. $(a + b)\ (a + x)\ (b + x) - a\ (b + x)^2 - b\ (a + x)^2$

284. $bc\ (b - c) + ca(c - a) + ab\ (a - b) + (b - c)\ (c - a)\ (a - b)$

285. $(a + b + c)\ [(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2]$

286. $(b - c)\ (x - a)^2 + (c - a)\ (x - b)^2 + (a - b)\ (x - c)^2$

287. $(a + b)^2 + (b + c)^2 + (c + a)^2 - (a + b + c)^2$

288. $a^2\ (a - b)\ (a - c) + b^2\ (b - c)\ (b - a) + c^2\ (c - a)\ (c - b)$

DIVISION DES MONÔMES ET DES POLYNÔMES

86. Définitions. Le quotient de deux monômes ou polynômes A et B s'indique par l'expression $\frac{A}{B}$ appelée fraction rationnelle.

Lorsqu'une telle fraction rationnelle se réduit à un monôme ou à un polynôme, on dit que le monôme ou polynôme A est divisible par le monôme ou polynôme B.

87. Division d'un monôme par un monôme. L'égalité $3\ a^4x^3y = 2a^3xy \times 3/2\ ax^2$
montre que le quotient de $3\ a^4x^3y$ par $2a^3xy$ est le monôme $3/2\ ax^2$. Nous pouvons écrire :
$3\ a^4x^3y : 2a^3xy = 3/2\ ax^2$ ou

$$\frac{3\ a^4x^3y}{2\ a^3xy} = \frac{3}{2}ax^2$$

De la règle de la multiplication des monômes il résulte que :
Lorsqu'un monôme dividende est divisible par un monôme diviseur,
1° Le quotient est un monôme dont le coefficient est égal au quotient des coefficients du dividende et du diviseur ;
2° L'exposant d'une lettre dans le quotient est égal à son exposant dans le dividende diminué de son exposant dans le diviseur.

$$\frac{\frac{-3}{2}\ a^3x^5y}{\frac{5}{4}\ a^3x^2} = \frac{-3}{2} \times \frac{4}{5} a^{3-3}x^{5-2}y = \frac{-6}{5}x^3y$$

Nous voyons d'autre part apparaître la condition suivante :
Pour que le quotient de deux monômes soit un monôme, il faut et il suffit que le dividende contienne toutes les lettres du diviseur avec des exposants au moins égaux.
Ainsi les quotients suivants ne se réduisent pas à des monômes :

$$\frac{2\ a^3x^2}{3\ axy^2} = \frac{2a^2x}{3y^2} \qquad \frac{5\ a^3x^2}{4\ ax^4} = \frac{5\ a^2}{4\ x^2}$$

88. Division d'un polynôme par un monôme. L'égalité

$$6\ a^3x^2y - 5\ a^3x^4 + 2a^4x^2y = 2a^2x^3\ (3y - 5/2\ x^2 + ay)$$

permet d'écrire :

$$\frac{6\ a^3x^2y - 5\ a^3x^4 + 2\ a^4x^2y}{2\ a^3x^2} = 3y - 5/2\ x^2 + ay$$

Le quotient du polynôme dividende par le monôme diviseur est un polynôme. D'après la règle n° 87, il est clair que les termes du quotient sont les quotients des termes du dividende par le diviseur.

D'où la condition :
Pour qu'un polynôme soit divisible par un monôme, il faut et il suffit que tous ses termes soient divisibles par ce monôme.
L'égalité

$$6x^3 + 3x^2 + 8x + 4 = (2x + 1) (3x^2 + 4)$$

montre de même que

$$\frac{6x^3 + 3x^2 + 8x + 4}{2x + 1} = 3x^2 + 4$$

Le quotient de deux polynômes est parfois un polynôme ou un monôme.

DECOMPOSITION EN FACTEURS

89. Définition. Un polynôme étant donné, il est souvent utile de pouvoir l'écrire sous forme d'un produit de facteurs, monômes ou polynômes. Ainsi : $2 a^2x + 4 ab$ se décompose :
$2 a^2x + 4 ab = 2a (ax + 2b)$
Comme le degré d'un polynôme est la somme des degrés de chacun des facteurs le nombre de ceux-ci est toujours limité.

90. Mise en facteur d'un monôme dans un polynôme. Considérons le polynôme

$$6 a^3x^2y - 5 a^3x^4 + 2 a^4x^2y$$

Tous les termes sont divisibles par ax^2. Nous pouvons donc écrire :

$$6 a^3x^2y - 5 a^3x^4 + 2 a^4x^2y = ax^2 (6 a^2y - 5 a^2x^2 + 2a^3y)$$

On dit que le monôme ax^2 a été mis en facteur commun dans le polynôme. Comme tout monôme mis en facteur doit être un diviseur de chacun des termes du polynôme, il en résulte que :
Le monôme de plus haut degré possible pouvant être mis en facteur dans un polynôme est formé des lettres communes à tous les termes du polynôme, chacune d'elles étant affectée de son plus petit exposant.
Le coefficient du monôme est d'ailleurs arbitraire. Ainsi dans l'exemple précédent nous pouvons mettre en facteur $-3 a^3x^2$:

$$6 a^3x^2y - 5 a^3x^4 + 2 a^4x^2y = -3 a^3x^2 (-2y + 5/3\ x^2 - 2/3\ ay)$$

91. Autres procédés de décomposition d'un polynôme.
Il n'y a pas de procédé général applicable à tous les cas pour mettre une expression en facteur dans un polynôme. Les procédés les plus employés sont les suivants :
1° Mise en facteur du monôme de plus haut degré possible,
2° Utilisation des identités remarquables :
$4x^2 - 12x + 9 = (2x - 3)^2$
$x^2 - 25 = (x + 5) (x - 5)$
$25a^2x^4 - 4 b^2 = (5ax^2 + 2b) (5ax^2 - 2b)$
3° Groupement de termes ayant un facteur commun :
$ax + by + ay + bx = ax + ay + bx + by = a (x + y) + b (x + y) = (x + y) (a + b)$

$x^2 - ax + bx - ab = x(x - a) + b(x - a) = (x - a)(x + b)$
$= (x^2 + bx) - (ax + ab) = x(x + b) - a(x + b) = (x + b)(x - a)$
$a(x^2 + 1) + x(a^2 + 1) = ax^2 + a^2x + a + x = ax(x + a) + 1(a + x) = (a + x)(ax + 1)$
4° Utilisation successive des méthodes précédentes :
$a^2 + b^2 - c^2 + 2ab = (a^2 + 2ab + b^2) - c^2 = (a + b)^2 - c^2 = [(a + b) + c]\,[(a + b) - c]$
$x^2 - 12x + 20 = x^2 - 12x + 36 - 16 = (x - 6)^2 - 4^2 = [(x - 6) + 4]\,[(x - 6) - 4] = (x - 2)(x - 10)$

EXERCICES

Calculer les quotients :

289. $(-2/3\ a^4x^5y^2) : (5/2\ ax^3y^2)$
290. $(3/5\ a^4b^2c^5) : (-3/4\ ab^2c^3)$
291. $(-10/7\ a^5x^2y^7) : (4/21\ a^2x^2y^3)$
292. $(-9/20\ a^3x^2y^6) : (-3/5\ a^2x^2y^4)$
293. $(3\ a^5x^4y^3) : (-9/4\ a^4x^2y^3)$
294. $(-7/2\ x^3y^5z^2) : (21/4\ x^3y^2z)$
295. $(14\ a^5 - 21\ a^3 + 3a^2) : (7/2\ a^2)$
296. $(7a^3x^2 - 4a^2x + 8a^2x^4) : (-3\ a^2x)$
297. $(-10/3\ a^2bx^3 + 15/2\ ab^3x^4 - 5abx^2) : (5/3\ abx^2)$
298. $(-21/5\ a^2b^3x^2y^3 + 2/3\ a^3bx^4y - 7\ a^2bxy^2) : (-7/2\ a^2bxy)$

Mettre en facteur le monôme de plus haut degré possible dans les polynômes :

299. $5x^6 - 7x^3 - 4x^5 + 2x^2$
300. $2a^3x^2 - 4ax^3 + 7a^2x^3$
301. $6/5\ a^2b^3x^2 - 7/2\ a^3bx^4 + 5/3\ a^4b^2x^3$
302. $3/2\ a^2b^3x^2y^3 + 5/2\ a^3bx^4y^2 - 7\ a^2xy^4$

Décomposer en un produit de facteurs les expressions suivantes :

303. $5/2\ x^3y^2 - 5x^2y^2 + 5/2\ xy^2$
304. $18\ abx^2 - 12\ abx + 2ab$
305. $4/5\ a3x^2 - 5\ a3y^2$
306. $3/4\ a^2bx^2 - 25/3\ a^2by^2$
307. $25\ a^2x^4y^2 - 4\ b^2y^2$
308. $(2x - 3)^2 - (3x - 5)^2$
309. $(2x + 3)^2 - 4(2x + 3)$
310. $(5x^2 + 3x - 2)^2 - (4x^2 - 3x - 2)^2$
311. $(3x - 5)^2 + (3x - 5)(2x + 3)$
312. $(a^2 + b^2 - 2)^2 - (2ab - 2)^2$
313. $a(x^2 + 1) - x(a^2 + 1)$
314. $ab(x^2 + y^2) + xy(a^2 + b^2)$
315. $(a^2 + b^2 - 10)^2 - (a^2 - b^2 - 8)^2$
316. $(4a^2 + b^2 - 9c^2)^2 - 16\ a^2b^2$

FRACTIONS RATIONNELLES

92. Définition. On appelle fraction rationnelle une fraction dont les deux termes sont des monômes ou des polynômes.

Ainsi $\frac{1}{x^2}$, $\frac{3x}{2x+3}$, $\frac{2x+5}{3x^2-5x}$

sont des fractions rationnelles.

La valeur numérique d'une fraction rationnelle est le quotient de la valeur du numérateur par celle du dénominateur. Par suite une fraction rationnelle ne peut se calculer si la valeur du dénominateur est nulle.

Ainsi la fraction $\frac{3x}{2x+3}$ n'a pas de sens, ou n'est pas définie, pour x = -3/2.

Dans ce qui suit, nous ne considérons que les valeurs des lettres pour lesquelles les fractions envisagées sont définies.

93. Propriété fondamentale. Lorsqu'on multiplie ou lorsqu'on divise les deux termes d'une fraction rationnelle par une même expression algébrique, on obtient une fraction équivalente.

En effet, d'après la propriété analogue des fractions numériques, la valeur numérique de la fraction rationnelle ne change pas. Ainsi :

$$\frac{2x}{x-2} \text{ est équivalente à } \frac{(2x)(x-3)}{(x-2)(x-3)}$$

$$\frac{x^3}{x^2-5x} \text{ est équivalente à } \frac{x^2}{x-5}$$

94. Simplification d'une fraction rationnelle. Pour simplifier une fraction ordinaire, on divise numérateur et dénominateur par un diviseur commun. On opère de même pour une fraction rationnelle. Afin d'apercevoir les facteurs communs aux deux termes, il faut donc commencer par décomposer ses termes en facteurs.

Exemples :

$$\frac{2a^3xy^2}{3x^3y^2} = \frac{2a^3 \times xy^2}{3x^2 \times xy^2} = \frac{2a^3}{3x^2}$$

$$\frac{3x^2 - 6x}{x^2 - 4} = \frac{3x\,(x-2)}{(x+2)(x-2)} = \frac{3x}{x+2}$$

$$\frac{3x^2 - 27}{x + 3} = \frac{3\,(x+3)(x-3)}{x+3} = 3\,(x - 3)$$

On voit dans ce dernier exemple qu'une fraction rationnelle se réduit parfois à un polynôme.

95. Réduction au même dénominateur. Lorsqu'il s'agit de fractions ordinaires ou de fractions à dénominateurs numériques, il suffit de prendre pour dénominateur un multiple commun à tous les dénominateurs. On procède d'une façon analogue pour les fractions rationnelles.

Exemples :

1° $\frac{5}{14}$, $\frac{4x}{21}$ et $\frac{3x-1}{6}$; $14 = 2 \times 7$; $21 = 3 \times 7$; $6 = 2 \times 3$; on peut prendre pour dénominateur commun $2 \times 3 \times 7 = 42$. On obtient $\frac{15}{42}$, $\frac{8x}{42}$, $\frac{21x-7}{42}$.

2° $\frac{x^2}{x^3}$, $\frac{6x}{2(x+1)}$ et $\frac{1}{x^2+x}$;

simplifions d'abord les fractions :

$\frac{1}{x}$, $\frac{3x}{(x+1)}$ et $\frac{1}{x(x+1)}$;

nous pouvons prendre pour dénominateur commun le produit x(x+1). Nous obtenons alors :

$\frac{x+1}{x(x+1)}$, $\frac{3x^2}{x(x+1)}$ et $\frac{1}{x(x+1)}$

Il y a toujours avantage à obtenir le dénominateur de plus faible degré possible.

96. Somme algébrique de fractions rationnelles. La somme de plusieurs fractions rationnelles de même dénominateur s'obtient comme pour les fractions ordinaires en prenant pour numérateur la somme des numérateurs, et le dénominateur commun.

La marche à suivre dans le cas le plus général est donc :

décomposer en facteurs les termes des fractions et simplifier si possible,

réduire les fractions au même dénominateur,

faire la somme des numérateurs en conservant le dénominateur commun,

simplifier si possible le résultat.

Exemples :

1° Effectuer $\frac{5}{14} - \frac{4x}{21} + \frac{3x-1}{6}$;

d'après ce qui a été vu plus haut, nous avons $\frac{15}{42} - \frac{8x}{42} + \frac{21x-7}{42} = \frac{13x+8}{42}$

2° de même $\frac{x^2}{x^3} + \frac{6x}{2(x+1)} - \frac{1}{x^2+x} = \frac{1}{x} + \frac{3x}{(x+1)} - \frac{1}{x(x+1)}$

$$= \frac{x+1}{x(x+1)} + \frac{3x^2}{x(x+1)} - \frac{1}{x(x+1)} = \frac{3x^2+x}{x(x+1)} = \frac{x(3x+1)}{x(x+1)} = \frac{(3x+1)}{(x+1)}$$

97. Multiplication et division des fractions rationnelles.

Pour multiplier des fractions rationnelles on multiplie les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux.

Pour diviser deux fractions rationnelles on multiplie la fraction dividende par l'inverse de la fraction diviseur.

Ces règles sont les conséquences des règles analogues relatives aux fractions ordinaires. Ne pas oublier de simplifier si possible les résultats avant d'effectuer les produits.

Exemples :

1°

$$\frac{a}{2} \times \frac{a+1}{6} \times \frac{4a}{a^2 - 1} = \frac{a\,(a+1)\,4a}{2 \times 6\,(a^2 - 1)} = \frac{4a^2\,(a+1)}{12\,(a+1)\,(a-1)} = \mathbf{\frac{a^2}{3(a-1)}}$$

2°

$$\frac{x^2}{x^2 - 1} : \frac{x+2}{x-1} = \frac{x^2}{x^2 - 1} \times \frac{x-1}{x -+ 2} = \frac{x^2\,(x-1)}{(x^2 - 1)\,(x+2)} = \frac{x^2\,(x-1)}{(x+1)\,(x-1)\,(x+2)}$$

$$= \mathbf{\frac{x^2}{(x+1)\,(x+2)}}$$

EXERCICES

Simplifier :

317. $\frac{7\,a^2x^5}{2b^2x^4}$

318. $\frac{-2\,a^3b^2x}{3a^3bx^3}$

319. $\frac{10\,a^2x^3y^2}{-4\,a^4x^3y}$

320. $\frac{x^2}{x^2 - x}$

321. $\frac{x^2 + x^3}{x^3 - x}$

322. $\frac{6x^2 - 4x}{9ax - 6a^2}$

323. $\frac{ax + by}{a^2x^2 - b^2y^2}$

324. $\frac{x^3 - 9x}{3x^2 - 9x}$

325. $\frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - 1}$

Calculer les expressions suivantes :

326. $(x + 1)/6 + 2(2x - 1)/21 - (3x + 1)/14$

327. $(x + 2)/5 - (4x + 3)/15 - (x + 1)/3$

328. $\frac{1}{a\,(a+1)} - \frac{1}{a\,(a-1)} + \frac{2a}{a^2 - 1}$

329. $\frac{2}{2a+1} - \frac{1}{2a-1} + \frac{2}{4a^2 - 1}$

330. $\frac{1}{x-1} - \frac{3}{x+1} + \frac{x^2 - 3}{x^2 - 1}$

331. $\frac{x}{x-1} - \frac{2}{x+1} - \frac{2}{x^2 - 1}$

332. $\frac{2}{x + 2} - \frac{1}{x - 2} + \frac{4}{x^2 - 4}$

333. $\frac{x - 2}{x^2 + 2x} - \frac{1}{x + 2} + \frac{1}{x}$

334. $\frac{x^3}{x^3 - x^2} + \frac{x}{x + 1} - \frac{2x}{x^2 - 1}$

335. $\frac{1}{x} + \frac{x - 2}{x^2 - 4} - \frac{2}{x^2 + 2x}$

Simplifier les expressions suivantes :

336. $\frac{x}{2} \times \frac{x + 1}{6} \times \frac{4x}{x^2 - 1}$

337. $\frac{x + 3}{5} \times \frac{x + 1}{x^2} \times \frac{x}{(x + 1)(x + 3)}$

338. $\frac{a - b}{a} \times \frac{a^2 - ab}{5} \times \frac{3a}{a^2 - b^2}$

339. $\frac{1}{a^2 - ab} \times \frac{4}{a^2} \times \frac{a^2 - b^2}{5}$

340. $\dfrac{\frac{x}{x - y} - \frac{y}{x + y}}{\frac{x}{x + y} + \frac{y}{x - y}}$

341. $\dfrac{\frac{x + 1}{x - 1} - \frac{x - 1}{x + 1}}{1 - \frac{x - 1}{x + 1}}$

342. $\dfrac{\frac{a}{b} + \frac{b}{a} - 2}{\frac{a}{b} - \frac{b}{a}}$

343. $\dfrac{\frac{a + b}{2} + \frac{b^2}{a - b}}{\frac{a + b}{2} - \frac{ab}{a + b}}$

EQUATIONS DU PREMIER DEGRE A UNE INCONNUE

98. Définitions. On appelle équation une égalité qui n'est vérifiée que par certaines valeurs attribuées aux lettres qu'elle contient. Ces lettres sont les inconnues de l'équation.
Premier exemple : l'égalité $3x - 7 = 8$
est une équation à une inconnue. Les deux membres ne sont égaux que si on attribue à cette inconnue la valeur $x = 5$. Cette valeur s'appelle la racine de l'équation.
2e exemple : l'égalité $2x - 3y = 7$ est une équation à deux inconnues ; les deux membres sont égaux si on attribue à x la valeur 2 et à y la valeur -1. Le système de valeurs $x = 2$ et $y = -1$ est une solution de l'équation. En général :
On appelle racine d'une équation à une inconnue toute valeur de cette inconnue pour laquelle l'équation devient une égalité numérique.
On appelle solution d'une équation à plusieurs inconnues tout système de valeurs attribuées à ces inconnues, pour lequel l'équation devient une égalité numérique.
Résoudre une équation, c'est en trouver les racines ou les solutions.
Nous utiliserons à cet effet les théorèmes sur les égalités n° 21 et 32.

99. Théorème I. On peut ajouter ou retrancher une même expression aux deux membres d'une équation.
De l'équation $3x + 7 - x^2 = 28 - x^2 - 2x$
on peut déduire la suivante, en ajoutant $x^2 + 2x$ aux deux membres :
$5x + 7 = 28$
Première application : dans une équation on peut faire passer un terme d'un membre dans l'autre , à condition de changer le signe qui le précède.
Soit l'équation $3x + 7 = 28 - 2x$
Ajoutons $2x - 7$ aux deux membres :
$3x + 7 + 2x -7 = 28 - 2x + 2x - 7$
soit $5x = 21$
les termes -2x et 7 de la première équation ont changé de membre et sont devenus +2x et -7 dans la deuxième équation. Cette opération s'appelle transposition.
2e application : degré d'une équation entière.
Si les deux membres d'une équation sont des polynômes, on dit que l'équation est entière. En faisant passer tous les termes dans le premier membre, l'autre se réduit à zéro. Le degré par rapport à l'ensemble des inconnues du polynôme ainsi obtenu dans le 1er membre est le degré de l'équation.
Ainsi $3x + 7 = 0$ est du premier degré
$4x^2 - 5x - 1 = 0$ est du second degré
$5x - 4y + 7 = 0$ est du premier degré
$xy + 3x - 4y - 1 = 0$ est du second degré.

100. Théorème II. On peut ajouter ou retrancher des équations membre à membre.
Ainsi des équations $5x - 2y = 3$ et $x + 2y = 5$
on peut déduire la suivante :

$$((5x - 2y) + (x + 2y) = 8$$
$$\text{soit } 6x = 8.$$

101. Théorème III. On peut multiplier ou diviser les deux membres d'une équation par un même nombre différent de zéro.

Ainsi de l'équation $\frac{x+5}{4} - \frac{x-3}{6} = \frac{x}{3}$

on peut, en multipliant les deux membres par 12, déduire la suivante :

$$3(x + 5) -2(x - 3) = 4x$$

1e application : on peut supprimer les dénominateurs d'une équation en multipliant ses termes par un multiple commun des dénominateurs.
L'exemple précédent montre en effet le passage de la première équation à la deuxième en multipliant les termes de la première par 12, multiple commun à 3, 4, 6.
2e application : On peut simplifier une équation en divisant ses termes par un même nombre différent de 0 :
soit $25x - 20 = 15x + 10$
divisons les deux membres par 5 :

$$5x - 4 = 3x + 2$$

102. Remarques.
1° Lorsqu'on multiplie les deux membres d'une équation par une expression qui contient l'inconnue, l'équation obtenue peut admettre des racines qui ne vérifient pas l'équation primitive. Exemple :
soit l'équation $3x - 2 = 0$
multiplions les deux membres par $(x - 1)$:
$(3x - 2) (x - 1) = 0$
On vérifie que 1 est racine de la deuxième équation mais pas de la première.
2° Lorsqu'on divise les deux membres d'une équation par une expression qui contient l'inconnue, l'équation primitive peut admettre des racines qui ne vérifient pas la nouvelle équation.
Soit l'équation $x^2 - 5x = 3x$
Divisons les deux membres par x :

$$x - 5 = 3$$

On vérifie que $x = 0$ est racine de la première équation mais pas de la deuxième.

103. Résolution de l'équation entière du premier degré à une inconnue.
Premier exemple : soit
$3(x + 4) - 5(x - 2) = 4(3x - 1) + 82$
Réduisons chaque membre, nous obtenons :

$$3x + 12 - 5x + 10 = 12x - 4 + 82$$
$$\text{ou } -2x + 22 = 12x + 78$$

Faisons passer les termes qui contiennent x dans le premier membre, les termes indépendants dans le deuxième (théorème I) :

$$-2x - 12x = - 22 + 78$$
$$-14x = 56$$

Divisons les deux membres par -14 (théorème III) :

$$x = \frac{56}{-14} \quad \text{soit } x = - 4$$

L'équation proposée a pour racine x = -4.
Vérification : 3 (-4 + 4) - 5(-4 - 2) est-il égal à 4(-12 - 1) + 82 ?
0 + 30 est-il égal à -52 + 82 ? oui.

104. Deuxième exemple. Soit $\frac{3x-4}{5} = \frac{x}{3} - \frac{4}{15}$

Multiplions les deux membres par 15 (théorème III) :

$$3(3x - 4) = 5x - 4$$
$$9x - 12 = 5x - 4$$

puis (théorème I) : $9x - 5x = 12 - 4$
soit : $4x = 8$
Divisons les deux membres par 4 : $x = 2$
Vérification : $\frac{6-4}{5}$ est-il égal à $\frac{2}{3} - \frac{4}{15}$ ou $\frac{2}{5}$ est-il égal à $\frac{6}{15}$: oui.

105. La marche à suivre est donc la suivante :
supprimer les dénominateurs s'il y a lieu en multipliant chaque terme par un multiple commun des dénominateurs ;
réduire les deux membres de l'équation obtenue ;
faire passer dans un membre les termes qui contiennent l'inconnue et dans l'autre membre les termes qui ne la contiennent pas ; réduire ;
pour obtenir la racine, diviser le terme connu par le coefficient de l'inconnue.

EXERCICES

Quel est le degré des équations suivantes :
344. $(4x - 1)^2 = (2x + 3)^2$
345. $2x (x + 5) - (x - 3)^2 = 0$
346. $(2x - 1)^2 + (x - 3)^2 - 5(x + 7)(x - 7) = 8$
347. $(x + 1)^3 + 2(x - 1)^3 + x^3 - 3x(x + 1)(x - 1) = 0$

Résoudre les équations suivantes :
348. $5(2x - 3) -4(5x - 7) = 19 - 2(x + 11)$

349. $4(x + 3) - 7x + 17 = 8(5x - 3) + 166$
350. $17 - 14(x + 1) = 13 - 4(x + 1) - 5(x - 3)$
351. $5x + 3{,}5 + (3x - 4) = 7x - 3(x - 0{,}5)$
352.$7(4x + 3) - 4(x - 1) = 15(x + 0{,}75) + 7$
353. $17x + 15(x - 1)= - 1 - 14(3x + 1)$

Résoudre les équations suivantes :
354. $(x - 1)^2 + (x + 3)^2 = 2(x - 2)(x + 1) + 38$
355. $5(x^2 - 2x - 1) + 2(3x - 2) = 5(x + 1)^2$
356. $(9x + 1)(x - 2) = (3x + 4)(3x - 5)$
357. $7(3 - 2x) - 5x(2x - 1) = (5x + 3)(3 - 2x)$
358. $(3x - 1)^2 - (2x + 3)^2 + 7 = (2x + 1)(2x - 1) + x(x + 7)$
359. $(x + 2)^3 + (x - 2)^3 + (x + 1)^3 = 3(x + 1)(x - 2)(x + 2)$

Résoudre les équations suivantes :
360. $5x/2 + 3 - 7x/4 = x + 9/4$
361. $3x/7 - 2x/15 + 3 = x/3 + 13/3$
362. $x + 1/2 - x/6 = 16 - 2x/9 + 1/3$
363. $7x/4 - 3 - x/2 = 2x/13 - 85/52$
364. $2x/3 + 4 - 2x/5 = x/2 - x/3 + 3{,}5$
365. $x/6 - 1= x/4 - x/3 -1$
366. $\frac{x+5}{4} - \frac{x-3}{6} = \frac{x}{3}$
367. $\frac{3x-7}{2} + \frac{x+1}{3} = -16$
368. $x - \frac{x+1}{3} = \frac{2x+1}{5}$
369. $\frac{7-3x}{12} + \frac{3}{4} = 2(x - 2) + \frac{5(5-2x)}{6}$
370. $\frac{x}{5} - \frac{3x-1}{6} + \frac{3-x}{4} = 0$
371. $\frac{3x+3}{4} + \frac{1}{2} = \frac{5x+9}{3} - \frac{7x-9}{4}$
372. $\frac{2x-7}{5} + \frac{x+11}{2} = -4$
373. $\frac{2x-3}{3} - \frac{x-3}{6} = \frac{4x+3}{3} - 17$
374. $\frac{5x-3}{4} - \frac{7x-5}{9} = \frac{x+19}{6}$
375. $\frac{5x+1}{8} - \frac{x-1}{3} = \frac{4(2x-3)}{9}$
376. $\frac{2x-1}{3} - \frac{5x+2}{7} = x + 13$
377. $\frac{8x+2}{5} - \frac{x-11}{7} = \frac{5x-3}{2} - \frac{3x-1}{4}$
378. $\frac{2x-7}{9} - \frac{x-5}{6} = \frac{x-9}{8}$
379. $\frac{5x+7}{4} - \frac{3x+5}{8} = \frac{4x+9}{5} - \frac{x-9}{3}$
380. $\frac{5x+6}{7} - \frac{3x+1}{4} = \frac{x+16}{5}$
381. $\frac{4x+7}{5} - \frac{x-5}{6} = \frac{2x+14}{3} - \frac{2x-7}{9}$
382. $\frac{(x-1)(x+5)}{3} - \frac{(x+2)(x+5)}{12} = \frac{(x-1)(x+2)}{4}$
383. $\frac{(x+1)^2}{3} + \frac{(x-2)(x-3)}{2} = \frac{(5x-1)(x-4)}{6} + \frac{28}{3}$
384. $\frac{(3x-1)(3x+1)}{9} - \frac{(x+1)(x-5)}{2} = \frac{(9x-1)(x+3)}{18} + \frac{8}{9}$

385. $\frac{(4x+7)^2}{4} - \frac{(5x-1)^2}{7} = \frac{(8x-3)(3x+4)-79x}{56}$

386. $(x - 8/3)(x + 0{,}75) = (x + 4{,}5)(x + 1{,}5) - 145/3$

387. $\frac{(x-5)^2}{5} + \frac{(x+3)^2}{3} = \frac{(3x+1)(3x-1)-(x+1)x}{15}$

388. $(3x - 4/5)(5x + 2/3) = 15(x-1)(x+1) + 7/15$

I. EQUATIONS QUI SE RAMÈNENT AU PREMIER DEGRÉ

106. Le premier membre est un produit de facteurs du premier degré, le second est nul.

Premier exemple. Résoudre l'équation :

$(x - 1)(3x + 1)(x - 2) = 0$

On sait que pour qu'un produit de facteurs soit nul il faut et il suffit que l'un des facteurs soit nul.

L'équation donnée peut donc se décomposer en trois autres :

$x - 1 = 0$ dont la racine est $x = 1$

$3x + 1 = 0$ dont la racine est $x = -1/3$

$x - 2 = 0$ dont la racine est $x = 2$

L'équation proposée admet 3 racines : 1 ; -1/3 ; 2.

Deuxième exemple. Résoudre l'équation

$$5x^2 + 7x = 0$$

Mettons x en facteur commun dans le premier membre, nous obtenons

$$x\,(5x + 7) = 0$$

qui se décompose en $x = 0$

$5x + 7 = 0$, racine $x = -7/5$

L'équation proposée admet deux racines : 0 et -7/5.

Troisième exemple. Résoudre l'équation $x^3 - x = 0$

Elle s'écrit $x(x^2 - 1) = 0$

ou $x\,(x + 1)(x - 1) = 0$

équation qui admet les trois racines 0 ; -1 ; 1.

De façon générale :

L'équation A.B.C = 0 (où A, B, C désignent des facteurs du premier degré) admet pour racines celles des équations A = 0, B = 0 et C = 0.

107. Equations où l'inconnue figure en dénominateur.

Premier exemple. Résoudre l'équation :

$$\frac{2x}{x+1} + \frac{3(x-1)}{x} = 5$$

Elle n'a de sens que si les valeurs numériques des fractions existent, ce qui impose les deux conditions

$x + 1 \neq 0$ soit $x \neq -1$, et $x \neq 0$

Réduisons les deux membres au dénominateur commun $x(x + 1)$ et multiplions-les par ce dénominateur, nous obtenons :

$$2x^2 + 3(x - 1)(x + 1) = 5x(x + 1)$$

soit

$$2x^2 + 3(x^2 - 1) = 5x^2 + 5x$$

$$5x^2 - 3 = 5x^2 + 5x$$

Retranchons $5x^2$ des deux membres, il reste :

$$-3 = 5x$$

soit enfin $x = -3/5$

ce qu'il est facile de vérifier.

108. Deuxième exemple. Résoudre :

$$\frac{8-5x}{4(x-2)} + \frac{x}{x+2} + 1 = 0$$

Nous devons poser les conditions $x - 2 \neq 0$ et $x + 2 \neq 0$ soit $x \neq 2$ et $x \neq -2$.

Réduisons au dénominateur commun $4(x - 2)(x + 2)$ et multiplions les deux membres par ce dénominateur :

$$(8 - 5x)(x + 2) + 4(x - 2)x + 4(x - 2)(x + 2) = 0$$

développons :

$$8x - 5x^2 + 16 - 10x + 4(x^2 - 2x) + 4(x^2 - 4) = 0$$

soit :

$$-5x^2 + 4x^2 + 4x^2 + 8x - 10x - 8x + 16 - 16 = 0$$

soit :

$$3x^2 - 10x = 0$$

où nous pouvons mettre x en facteur : $x(3x - 10) = 0$

équation qui se décompose en $x= 0$

et $3x - 10 = 0$, racine $x = 10/3$.

Ces deux racines 0 et 10/3 sont acceptables car différentes de 2 et -2.

En général : les racines de l'équation $\frac{A}{B} = 0$ (où $\frac{A}{B}$ symbolise une fraction rationnelle) sont les racines de l'équation $A = 0$ qui n'annulent pas B.

II. ÉQUATIONS LITTÉRALES

109. Cas général. Si les coefficients d'une équation du premier degré sont littéraux, on peut la ramener, après disparition des dénominateurs et réduction des termes inconnus dans un membre, des termes connus dans l'autre, à la forme

$$ax = b$$

1° Si $a \neq 0$, en divisant les deux membres par a, on obtient

$$x = \frac{b}{a}$$, racine de l'équation proposée

2° Si $a = 0$, cette division est impossible, l'équation se réduit à

$$0 \times x = b$$

a) si $b \neq 0$, l'équation est impossible, sans quoi on aurait $0 = b$,

b) si $b = 0$, l'équation devient

$$0 \times x = 0$$

Tout nombre x vérifie alors l'équation, on dit qu'elle est indéterminée, ou elle se réduit à une identité.

Conclusion :

1° $a \neq 0$, l'équation admet une racine $x = \frac{b}{a}$

2° $a = 0$ et $b \neq 0$, l'équation est impossible,

$b = 0$, l'équation est indéterminée.

110. Exemple d'équation impossible.

Considérons l'équation $3x - 5 = 2(x - 1) + x$

soit $3x - 5 = 3x - 2$

ou $3x - 3x = 5 - 2$

ce qui donne $0x = 3$, impossible.

111. Exemple d'équation indéterminée.

Considérons l'équation $(x + 2)^2 - (x - 2)^2 = 8x$

$$x^2 + 4x + 4 - (x^2 - 4x + 4) = 8x$$

soit $8x = 8x$, égalité vraie pour tout x,

ou $0x = 0$, indéterminée.

EXERCICES

Résoudre les équations :

389. $(x - 1)(x - 2)(x - 3) = 0$
390. $(x - 3)(x - 4)(x - 5) = 0$
391. $(2x + 1)(x + 1)(x - 3) = 0$
392. $(2x + 1)(x + 4)(3x + 1) = 0$
393. $x(5x + 1)(4x - 3)(3x - 4) = 0$
394. $5x(3x - 7) = 0$
395. $x^2 - 3x = 0$
396. $5x^2 + 8x = 0$
397. $4x^2 - 7x/3 = 0$
398. $x^2/5 + x = 0$
399. $-3x^2/5 + x = 0$
400. $-5x^2/ 7 - 3x/4 = 0$
401. $x(x + 1) = x + 1$
402. $(4x - 1)(x - 3) = (x - 3)(5x + 2)$
403. $(x + 3)(x - 5) + (x + 3)(3x - 4) = 0$
404. $(x + 5)(4x - 1) + x^2 - 25 = 0$
405. $(x + 4)(5x - 9) - x^2 + 16 = 0$
406. $5(x + 1)(x + 2)(x - 3) = 4(x + 1)(x + 2)(x - 4)$
407. $x^2 - 9 = 0$
408. $5x^2 - 125 = 0$
409. $4x^2 - 49 = 0$
410. $x^2 - 100 = 0$
411. $x^2 = 81$
412. $9x^2 = 64$
413. $(x + 1)^2 - (2x - 5)^2 = 0$
414. $(2x + 7)^2 - (4x - 9)^2 = 0$
415. $(5x + 1)^2 = (x - 1)^2$
416. $(3x + 1)^2 = (x - 4)^2$
417. $4(x + 1)^2 - 9(x - 1)^2 = 0$
418. $(x + 7)^2 -81(x - 5)^2 = 0$
419. $5x^2 - 5x = 0$
420. $(x + 1)(x - 1)^2 - (x + 1)(x - 2)^2 = 0$
421. $3x^3 - 12x = 0$
422. $(3x + 1)(x - 3)^2 = (3x + 1)(2x - 5)^2$

423. $7x^3 - 175x = 0$

424. $(x + 5)(3x + 2)^2 = x^2 (x + 5)$

425. $\frac{4x+7}{x-1} = \frac{12x+5}{3x+4}$

426. $\frac{5x-1}{3x+2} = \frac{5x-7}{3x-1}$

427. $\frac{10x-3}{x-1} = \frac{2}{3}$

428. $\frac{2(3-7x)}{1+5x} = \frac{1}{2}$

429. $\frac{x+5}{x-5} - \frac{x-5}{x+5} = \frac{20}{x^2-25}$

430. $\frac{x+4}{x-4} - \frac{x-4}{x+4} = \frac{24}{x^2-16}$

431. $\frac{7}{x-5} = \frac{4}{x+1} + \frac{3}{x-2}$

432. $\frac{9}{x} = \frac{8}{x+1} + \frac{1}{x-1}$

433. $(x - 3)^2 = \frac{x^3}{x+6}$

434. $(x - 4)^2 = \frac{x^3}{x+8}$

435. $\frac{4x+5}{x+2} - \frac{x+4{,}5}{3x+3} = \frac{5x+1}{x+1}$

436. $\frac{5x+9}{14} - \frac{3x}{7} = \frac{10x-13}{14(x-1)}$

437. $\frac{4x^2-5x+3}{4x-3} = \frac{7x^2-3x+5}{7x-5}$

438. $\frac{4x+1}{x+2} = \frac{x+2}{4x+1}$

439. $\frac{8x+5}{12} - \frac{3x+1}{4x-12} = \frac{2x}{3}$

440. $\frac{1 + \frac{x}{x+3}}{1 - \frac{x}{x+3}} = 3$

Résoudre les équations en x suivantes :

441. $5x = m + 1$

442. $(m^2 + 1) x = 4m - 5$

443. $(m - 1) x = a$

444. $ax - bx = cx + 5$

445. $mx + 25 = m^2 - 5x$

446. $m(x + 2) = x + a + 2$

447. Déterminer m pour que l'équation :

$$5x^2 - 2(m - 1)x + m - 3 = 0$$

soit vérifiée pour $x = 0$; pour $x = -1$; pour $x = +1$.

448. Peut-on déterminer m pour que l'équation

$mx + (m - 1)x = 4/3$

soit vérifiée pour $x = 0$; pour $x = +5$; pour $x = -5$?

SYSTÈMES D'ÉQUATIONS DU PREMIER DEGRÉ

112. Equation à deux inconnues. Considérons l'équation du premier degré à deux inconnues :
$3x + 4y = 5$.
Elle admet pour solutions (n° 98) : $x = -1$ et $y = +2$
$x = +1$ et $y = -1/2$
$x = +3$ et $y = -1$, etc ...
En général : Une équation à plusieurs inconnues admet une infinité de solutions.

113. Système de deux équations à deux inconnues. Considérons les deux équations du premier degré à deux inconnues :

$$2x - 5y = -12$$
$$3x + 4y = 5$$

Leur association forme un système de deux équations à deux inconnues. Résoudre ce système,c'est trouver les solutions communes aux deux équations qui le composent.
A cet effet, on forme) partir du système donné une équation contenant une seule inconnue ; il faut donc faire disparaître ou éliminer l'autre. Nous utiliserons pour cela deux méthodes.

I. ELIMINATION PAR SUBSTITUTION

114. Considérons le système :

$$3x + 4y = 5 \qquad (1)$$
$$2x - 5y = -12 \qquad (2)$$

Dans l'équation (1) calculons y :

$$y = \frac{5-3x}{4} \qquad (3)$$

Remplaçons y par la valeur ainsi trouvée dans l'équation (2), nous obtenons :

$$2x - 5\left(\frac{5-3x}{4}\right) = -12 \qquad (4)$$

L'équation (4) contient la seule inconnue x. Résolvons-la, pour cela multiplions les deux membres par 4 :

$$8x - 5(5 - 3x) = - 48$$
ou $$8x - 25 + 15x = - 48$$
ou $$23x = - 23$$
donc $$x = -1$$
Portons $x = -1$ dans l'équation (3), nous avons :

$$y = \frac{5+3}{4} = 2$$

le système proposé admet, comme il est facile de le vérifier, la solution $x = -1$ et $y = 2$.

115. La méthode de substitution consiste donc à calculer l'une des inconnues dans l'une des équations puis, dans l'autre équation, à substituer à cette inconnue la valeur trouvée.
On réussit ainsi à éliminer une inconnue.

II. ELIMINATION PAR ADDITION

116. Premier exemple. Soit le système

$$\left| \begin{array}{ll} 4x + 3y = 13 & (1) \\ 5x - 3y = - 31 & (2) \end{array} \right.$$

Les coefficients de y sont symétriques. Additionnons membre à membre (n°100); il vient
$9x + 0y = - 18$ soit $9x = - 18$
y se trouve ainsi éliminé et nous obtenons $x = -2$.
En portant cette valeur dans (1), nous avons $-8 + 3y = 13$ soit $y = 7$
Le système proposé admet comme il est facile de le vérifier, la solution $x = -2$ et $y = 7$.

117. Deuxième exemple. Soit le système

$$\begin{array}{ll} 9x + 2y = 17 & (1) \\ 6x + 5y = -7 & (2) \end{array}$$

Les coefficients de y sont 2 et 5. Afin de les rendre symétriques, multiplions les membres de l'équation (1) par +5 et ceux de l'équation (2) par -2 (n° 101), puis additionnons membre à membre :

$$\begin{array}{rcl} 45x + 10y & = & 85 \\ -12x - 10y & = & 14 \\ \hline 33x \quad\quad & = & 99 \end{array}$$

soit $x = 3$.
Portons $x = 3$ dans l'équation (1) : $27 + 2y = 17$ soit $y = -5$. Le système admet pour solution

$$x = 3 \text{ et } y = -5.$$

Remarquons que la valeur de y peut aussi se calculer en éliminant x entre les équations (1) et (2). Les coefficients de x étant 9 et 6, les multiplicateurs 6 et -9 peuvent être simplifiés et ramenés à 2 et -3 :

$$\begin{array}{rcl} 18x + 4y & = & 34 \\ -18x - 15y & = & 21 \\ \hline -11y & = & 55 \end{array}$$

soit $y = -5$.

118. Cette méthode consiste donc à multiplier les deux membres de chaque équation par des nombres choisis de telle sorte que les coefficients d'une des inconnues deviennent des nombres symétriques. L'une des inconnues s'élimine alors par addition.

Lorsque les coefficients d'une des inconnues sont égaux, cette inconnue s'élimine immédiatement en soustrayant membre à membre les deux équations.
Exemple. Soit le système

$$7x + 5y = 19$$
$$3x + 5y = 31$$

Retranchons membre à membre : $4x + 0y = -12$ soit $x = -3$
L'équation $7x + 5y = 19$ donne alors :
$-21 + 5y = 19$ d'où $y = 8$.

119. Généralisation. Les procédés d'élimination précédents se généralisent immédiatement pour des systèmes à plus de deux inconnues.
Exemple. Résoudre le système :

$$2x + 3y - 2z = -2 \qquad (1)$$
$$4x - 5y + z = -11 \qquad (2)$$
$$3x + 22y - 3z = 32 \qquad (3)$$

1° Par substitution. Calculons z dans (2) et portons la valeur trouvée dans les équations (1) et (3) :

$$z = -11 - 4x + 5y$$
$$2x + 3y - 2(-11 - 4x + 5y) = -2$$
$$3x + 22y -3(-11 - 4x + 5y) = 32$$

soit :

$$z = -11 - 4x + 5y \qquad (4)$$
$$10x - 7y = - 24 \qquad (5)$$
$$15x + 7y = -1 \qquad (6)$$

Les équations (5) et (6) forment un système de deux équations à deux inconnues. Par addition nous obtenons

$$25x = -25 \qquad \text{d'où } x = -1$$

L'équation (5) donne alors

$$- 10 - 7y = - 24 \quad \text{d'où } y = 2.$$

En portant $x = -1$ et $y = 2$ dans (4), nous obtenons $z = - 11 + 4 + 10$ soit $z = 3$.

2° Par addition. Eliminons z entre les équations (1) et (2). En multipliant les deux membres de (2) par +2 et en ajoutant membre à membre à (1), nous obtenons

$$10x - 7y = - 24$$

Eliminons z entre (2) et (3). En multipliant les deux membres de (2) par +3 et en ajoutant membre à membre à (3), nous obtenons

$$15x + 7y = -1$$

Nous reconnaissons les équations (5) et (6), et nous sommes conduits comme dans la méthode précédente à résoudre le système de ces équations ; on trouve $x = - 1$ et $y = 2$, et en portant dans (2), $z = 3$.

EXERCICES

Résoudre les systèmes :

449.	$5x + 3y = 19$ $2x + 9y = 31$	450.	$-5x + y = 10$ $x + 3y = -18$	451.	$-11x + 13y = 24$ $13x + 11y = -2$	452.	$4x - 3y = -10$ $2x + 5y = 8$
453.	$7x + 13y = -39$ $5x - 11y = 33$	454.	$10x - 49y = -48$ $15x + 17y = 109$	455.	$13x + 21y = 123$ $15x - 35y = -95$	456.	$7x + 36y = 37$ $9x + 108y = 171$
457.	$22x - 12y = 2$ $33x - 15y = -3$	458.	$x/3 - y/4 = 2$ $2x/5 + y = 18$	459.	$3x/4 + 2y/5 = 2{,}3$ $x - 3y/5 = 0{,}8$	460.	$5x/7 - 2y/3 = 6$ $x/2 + y/3 = 9$
461.	$-0{,}5x + 1{,}2y = 2{,}7$ $x - 4{,}5y = -7{,}5$	462.	$7x/2 - y = 14$ $x + 3y/11 = 4$	463.	$x/4 + y/3 = 1/6$ $(x + y)/5 = 7/60$		

464. $5(x + 2y) -3(x - y) = 99$ $x - 3y = 7x - 4y - 17$	465. $\frac{x+3}{y-5} = 5$ et $\frac{x-1}{y+3} = \frac{1}{9}$
466. $3(y - 5) + 2(x - 3) = 0$ $7(x - 4) - 3(x + y - 1) = 14$	467. $\frac{2x-y}{x-y} = 1{,}6$ et $\frac{2x+y}{x+1} = 4$
468. $\frac{2x-5y}{2} - \frac{3x-7y}{11} = -55$ et $y = 2x$	469. $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = x^2 + y^2$ $y/x + 1/2 = 0$
470. $\frac{4x-5y+1}{7} + \frac{3y-52}{2} = -16$ $\frac{5x+9y+6}{5} - \frac{x+y}{3} = 16$	471. $\frac{x+1}{x-1} = \frac{y+3}{y+1}$ $3x + 2y + 2 = 0$
472. $(x + y)/2 = (7x - 5y)/6 + (3x - 6)/12$ $(x + 6y)/2 = (x - 2y)/7 + 4$	473. $\frac{y+1}{x-1} -3 = \frac{y-3}{5(x-1)} - \frac{7}{3}$ $y = 2x - 11$
474. $\frac{x-5}{5} + \frac{y-7}{11} = x + y - 12$ $\frac{x+5}{5} + \frac{y+7}{7} = 4$	475. $\frac{(x+2)^2 - (x-1)^2}{(y+1)^2 - (y-2)^2} = 1$ $x/y = 10/3$
476. $\frac{x+2}{y-3} - \frac{x+1}{y+1} = \frac{8}{(y+1)(y-3)}$ $\frac{x+1}{x} - \frac{y-2}{y} = \frac{5}{xy}$	477. $y/2 = (x^2 - 1) - (x - 2)^2$ $y/3 = (x + 3)^2 - (x - 3)^2$

478. $x + 2y + 3z = 10$ $2x + 3y + z = 13$ $3x + y + 2z = 13$	479. $x + y + z = 4$ $x - y + z = 10$ $x + y - z = 0$	480. $x + y = 16$ $y + z = 20$ $z + x = 18$

481. $4x - 5y + 7z = 9$ $3x + 7y - 2z = -4$ $x + y + z = 0$	482. $5x + 7y = 1$ $2x + 3y + 5z = -15$ $x - 2y - 5z = 22$	483. $3x - 2y = 0$ $y + z = 14$ $x - 5z = -36$
484. $x/5 + y/3 + z/2 = 9$ $x/2 - y/3 + z/8 = 3$ $x + y + z = 27$	485. $x/2 + y/3 + z/5 = 31/30$ $x/3 + y/2 + z/5 = 31/30$ $x/5 + y/3 + z/2 = 31/30$	

LES PROBLÈMES D'ALGÈBRE

120. Problème. Quel nombre entier faut-il ajouter à la fois aux deux termes de la fraction 3/5, pour obtenir une fraction égale à 2/3 ?

Désignons par x le nombre entier et positif inconnu.

Nous avons $\frac{(x+3)}{(x+5)} = \frac{2}{3}$

L'inconnue satisfait à cette équation ; réciproquement, toute racine entière et positive de cette équation est une solution du problème.

Nous avons, en réduisant au dénominateur 3(x+5) :

$$\frac{3(x+3)}{3(x+5)} = \frac{2(x+5)}{3(x+5)}$$

Nous pouvons supprimer le dénominateur commun :

$$3(x + 3) = 2(x + 5)$$

soit $3x - 2x = 10 - 9$

ou $x = 1$

cette racine est la solution du problème ; vérifions :

$$\frac{1+3}{1+5} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

121. Problème. 21 livres sont empilés les uns sur les autres ; la hauteur de la pile atteint 81 cm. Certains de ces livres ont une épaisseur de 5 cm, les autres ont une épaisseur de 3 cm. Trouver le nombre de livres de chaque sorte.

Désignons par x le nombre de livres de 5 cm et par y le nombre de livres de 3 cm. Le nombre total de livres est 21, donc

$x + y = 21$ ou $y = 21 - x$ (1)

Les livres de 5 cm d'épaisseur ont, en cm, une épaisseur totale de 5x ; ceux de 3 cm ont une épaisseur totale de 3y ou 3(21 - x).

La hauteur totale de la pile est 81 cm. Donc

$$5x + 3(21 - x) = 81 \quad (2)$$

ou $5x + 63 - 3x = 81$

ou $2x = 18$

soit $x = 9$ et $y = 21 - 9 = 12$.

Vérification : 5 cm × 9 + 3 cm × 12 = 45 cm + 36 cm = 81 cm.

122. Problème. Les fortunes de trois personnes sont proportionnelles aux nombres 2, 3 et 5. En additionnant le triple de la première, le double de la seconde et la troisième, on trouve 510 000 fr. Quelles sont ces trois fortunes ?

Désignons par x, y et z respectivement ces fortunes. Elles sont proportionnelles à 2, 3, 5, ce qui

s'écrit :

$$x/2 = y/3 = z/5 \quad (1)$$

où x, y, z sont des nombres positifs.
Désignons par r la valeur commune de ces rapports, nous avons $x = 2r$; $y = 3r$; $z = 5r$.
Additionnons le triple de la 1e soit 6r, le double de la 2e, soit 6r et la 3e, soit 5r. Nous trouvons :

$$6r + 6r + 5r = 510\,000$$

$$\text{ou } 17\,r = 510\,000$$

$$\text{donc } r = 510\,000/17 = 30\,000.$$

La première fortune est $30\,000 \times 2 = 60\,000$ fr
la deuxième est $30\,000 \times 3 = 90\,000$ fr
et la troisième $30\,000 \times 5 = 150\,000$ fr.
La vérification est immédiate.

123. Remarques générales. Des exemples précédents il résulte que la solution algébrique d'un problème comporte :
1° le choix de l'inconnue. Ce choix doit entraîner la solution du problème dès que l'inconnue est déterminée. Dans le cas où le problème comporte plusieurs inconnues il faut :
- ou bien exprimer ces inconnues à partir de l'une d'elles. Ainsi le problème du n° 121 comporte deux inconnues et nous avons exprimé l'une y à partir de l'autre, x, à l'aide de l'équation $y = 21 - x$.
- ou bien exprimer toutes ces inconnues à l'aide d'une inconnue auxiliaire comme dans le n° 122.
2° la mise en équation. Elle consiste à traduire l'énoncé par une égalité où entrent les données et l'inconnue. Il faut aussi se demander quelles sont les conditions pour que toute racine de l'équation obtenue soit une solution du problème.
3° la résolution de l'équation obtenue. C'est la partie purement algébrique du problème. On vérifie ensuite si la racine trouvée satisfait aux conditions imposées ci-dessus.

124. Interprétation d'une solution négative. Un père a 43 ans, son fils 23 ans. Dans combien d'années l'âge du père sera-t-il le double de l'âge du fils ?
Soit x le nombre d'années demandé ; l'âge du père devient $43 + x$, celui du fils devient $23 + x$. il faut donc que $43 + x = 2(23 + x)$
Réciproquement, toute racine positive de cette équation est une solution du problème. On obtient :
$43 + x = 46 + 2x$
$43 - 46 = 2x - x$
soit $-3 = x$.
Le problème est impossible. Cependant, on peut interpréter la réponse de la façon suivante : ajouter -3 années à l'âge du père et du fils, c'est leur retrancher 3 ans. La réponse convient si on modifie ainsi l'énoncé : Il y a combien d'années l'âge du père était-il le double de l'âge du fils ?

EXERCICES

486. Trouver 3 nombres entiers consécutifs dont la somme est 57.
487. La somme de 5 nombres impairs consécutifs est 55. Quels sont ces nombres ?
488. Un père a 29 ans, son fils a 5 ans ; dans combien d'années l'âge du père sera-t-il le triple de l'âge du fils ?
489. Un père a 41 ans ; ses trois enfants ont 7, 9 et 13 ans. Dans combien d'années l'âge du père sera-t-il la somme des âges de ses trois enfants ?
490. Trouver un nombre dont la somme des quotients par 5, 7 et 9 soit 429.
491. En retranchant 5 aux 2/3 d'un nombre on trouve le même résultat qu'en ajoutant 2 aux 2/5 de ce nombre. Quel est ce nombre ?
492. Trouver un nombre dont le carré augmente de 189 quand on augmente le nombre de 7.
493. Quel nombre faut-il ajouter aux deux termes de la fraction 7/13 pour qu'elle devienne égale à 2/3 ?
494. Quel nombre faut-il retrancher aux deux termes de la fraction 17/23 pour obtenir une fraction égale à 5/8 ?
495. Quel nombre faut-il ajouter aux deux termes de la fraction 5/8 et retrancher aux deux termes de la fraction 3/4 pour obtenir deux fractions égales ?
496. Une personne dispose de 2 heures pour effectuer une promenade. Elle part en tramway à la vitesse moyenne de 12 km/h et revient à pied, à la vitesse moyenne de 4 km/h. A quelle distance du point de départ devra-t-elle quitter le tramway ?
497. Un épicier achète un certain nombre de bouteilles de vin pour 1125 francs. En vendant la bouteille 8,25 fr, il gagnerait autant que ce qu'il perdrait s'il la vendait 6,75 fr. Quel est le nombre de bouteilles ?
498. Un capital est placé à 6% pendant 18 mois. S'il était placé à 5% pendant deux ans, les intérêts augmenteraient de 450 fr. Quel est ce capital ?
499. Deux capitaux dont l'un est les 3/4 de l'autre sont placés pendant 18 mois au même taux 5%. La somme totale ainsi obtenue, capitaux et intérêts réunis, est 90 300 fr. Quels sont ces deux capitaux ?
500. Pour se rendre à son travail, un employé parcourt les 3/4 de la distance totale en autobus à la vitesse moyenne de 20 km/h, et le reste à pied à la vitesse moyenne de 5 km/h. Sachant qu'il met 21 minutes pour se rendre à son travail, quelle distance totale parcourt-il ?
501. A quelle heure entre 2 heures et 3 heures les aiguilles d'une montre sont-elles exactement l'une sur l'autre ? A quelle heure font-elles un angle droit ?
502. Une automobile parcourt 207 km en 2h 45 mn. . Elle perd les 2/5 de sa vitesse dans la traversée des agglomérations, dont la longueur totale est 27 km. Quelle est la vitesse moyenne sur route de cette automobile ?
503. Deux automobiles partent à la même heure d'une ville A pour une ville B, la première avec une vitesse moyenne de 80 km/h la seconde avec une vitesse moyenne de 60 km/h. Sachant que les heures d'arrivée sont 15h 45 mn et 16h 15 mn, trouver la distance des villes A et B.
504. Une somme est partagée entre plusieurs personnes de la façon suivante : la première a 100 fr plus le 1/4 du reste ; la deuxième a 200 fr plus le 1/4 du nouveau reste, et ainsi de suite. Il se trouve que toutes les parts sont égales. Quelle est la somme partagée? Quelle est la valeur d'une part et le nombre de parts ?

505. Une personne a placé les 3/4 d'un capital à 5% et le reste à 4,5%. La première partie rapporte en 18 mois 3600 fr de plus que la seconde en un an. Quel est le capital total ?
506. Un fil d'or et de cuivre pesant 83 grammes subit quand on le plonge dans l'eau une perte de poids de 7 grammes. Quelles sont les quantités d'or et de cuivre contenues dans ce fil, sachant que les densités de l'or et du cuivre sont 19,5 et 8,8 ?
507. Un mètre de drap coûte 36 fr de plus qu'un mètre de toile. Sachant que 10 m de drap et 12 m de toile coûtent ensemble 1284 fr, trouver le prix du mètre de chaque étoffe.
508. Une fermière vend 3 canards et 4 poulets pour 250 fr. Sachant qu'un canard et un poulet valent ensemble 70 fr, trouver le prix d'un canard et celui d'un poulet.
509. Deux ouvriers gagnent ensemble 142,50 fr par jour. En un mois, le premier a travaillé 24 jours et le second 20 jours. Ils ont reçu ensemble 3116 fr. Quel est le salaire journalier de chacun ?
510. Un commerçant a vendu 5 m de toile et 10 m de drap pour 770 fr. Une seconde fois, il a vendu 27 m de toile et 23 m de drap pour 2316,60 fr. Quel est prix du mètre de chaque étoffe ?
511. Un bateau fait sur un fleuve le service entre deux localités A et B. Cette dernière est située à 25,2 km en aval de A. La vitesse du courant est de 3 km/h, et elle s'ajoute ou se retranche à la vitesse du bateau suivant qu'il descend ou remonte le courant. La durée du trajet de A à B est les 3/4 de celle du retour.
1° Trouver la vitesse propre du bateau.
2° Calculer le retard dû au courant sur la durée du trajet aller et retour.
512. Un marchand a vendu une pièce de drap pour 6120 fr, une pièce de soie pour 3570 fr, et une pièce de toile pour 2550 fr. La longueur de la pièce de drap surpasse de 3 m celle de la pièce de soie et est inférieure de 6 m à celle de la pièce de toile. Sachant qu'un mètre de drap coûte autant qu'un mètre de soie et un mètre de toile réunis,
1° Trouver la longueur de chacune des 3 pièces,
2° Trouver le prix du mètre de chaque étoffe.
513. Un automobiliste part à 8 h 20 d'une localité A pour une ville B située à 192 km de A et où il doit arriver à une heure déterminée. Il calcule la vitesse moyenne qu'il doit réaliser, mais arrivé à mi-route, il s'aperçoit que sa vitesse a été inférieure de 12 km/h à la vitesse prévue. Il accélère son allure et arrive à l'heure fixée, en effectuant dans la deuxième partie de son parcours une vitesse supérieure de 18 km/h à la vitesse prévue.
1° Calculer la vitesse moyenne réalisée sur le parcours entier, puis l'heure d'arrivée.
2° Quel était à mi-route le retard de l'automobiliste ?

ARITHMETIQUE

Dix-neuvième leçon

I. NOMBRES PREMIERS

125. Diviseurs d'un nombre. La division de 105 par 21 se fait exactement, car $105 = 21 \times 5$.
On dit alors que :
105 est un multiple de 21 ou que 105 est divisible par 21,
21 est un diviseur de 105 ou que 21 divise 105.
Or $21 = 7 \times 3$, ce qui permet d'écrire :
$105 = 21 \times 5 = 7 \times 3 \times 5 = 7 \times 15$.
Par suite 7 qui est un diviseur de 21 est aussi un diviseur de 105.

126. Tout diviseur d'un diviseur d'un nombre est aussi un diviseur de ce nombre.
Les diviseurs d'un nombre s'obtiennent en essayant de le diviser par les nombres entiers successifs.
Ainsi 105 admet pour diviseurs :
1, 3, 5, 7, 15, 21, 35, 105.
Comme 105 n'est pas divisible par 2, il ne peut être divisible par un multiple de 2. Il est donc inutile dans la recherche précédente d'essayer les divisions par 4, 6, 8, etc...

127. Nombres premiers. Un nombre premier est un nombre qui n'est divisible que par lui-même et l'unité.
13 est premier car ses seuls diviseurs sont 1 et 13.
25 n'est pas premier car il admet pour diviseurs 1, 5, 25.

128. Table des nombres premiers. Soit à établir la liste des nombres premiers inférieurs à 50.
Ecrivons les nombres entiers de 1 à 50 et supprimons les nombres non premiers.

1	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~	~~50~~

Nous avons supprimé tous les multiples de 2, 3, 5, 7. Le plus petit nombre à enlever ensuite serait donc $11 \times 11 = 121$. Nous pouvons en conclure que tous les nombres restant dans le tableau sont premiers. Soient :
1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47.

129. Théorème. Tout nombre non premier admet au moins un diviseur premier.
Soit le nombre non premier 3551. Son plus petit diviseur autre que 1 est 53. Si 53 admettait un diviseur autre que 1 et 53, ce nombre serait aussi un diviseur de 3551, inférieur à 53, ce qui n'est

pas. 53 est donc premier.

130. Reconnaître si un nombre est premier. Du théorème précédent, il résulte qu'un nombre qui n'admet aucun diviseur premier, est un nombre premier.
Soit par exemple 97.
1° 97 n'est pas divisible par 2, 3, 5 (règles de divisibilité),
2° 97 n'est pas divisible par 7 (quotient 13, reste 6),
3° 97 n'est pas divisible par 11 (quotient 8, reste 9),
4° 97 n'est pas divisible par un nombre supérieur à 11 ; en effet, le quotient de 97 par 11 est 8 ; si 97 était divisible par un nombre supérieur à 11, le quotient en serait inférieur à 8 et nous l'aurions trouvé comme diviseur dans les premiers essais ; c'est impossible donc 97 est un nombre premier.
Règle. Pour reconnaître si un nombre est premier, on le divise par les nombres premiers successifs. si aucune division ne se fait exactement, le nombre est premier.
On arrête les divisions lorsque le quotient obtenu est est égal ou inférieur au diviseur essayé.

II. DÉCOMPOSITION D'UN NOMBRE EN FACTEURS PREMIERS

131. Théorème. Tout nombre non premier peut se décomposer en un produit de facteurs premiers.
Considérons le nombre 315. Il est divisible par 3 :
$315 = 3 \times 105$ Or, $105 = 3 \times 35$, d'où
$315 = 3 \times 3 \times 35$ et, puisque $35 = 5 \times 7$
$315 = 3 \times 3 \times 5 \times 7$ soit $315 = 3^2 \times 5 \times 7$
315 est décomposé en un produit de facteurs premiers.
La décomposition d'un nombre en facteurs premiers ne peut se faire que d'une seule manière.
Ainsi nous aurions pu écrire : $315 = 15 \times 21$
Comme $15 = 3 \times 5$ et $21 = 3 \times 7$, nous obtenons $315 = 3 \times 5 \times 3 \times 7 = 3^2 \times 5 \times 7$
nous obtenons la même décomposition.

132. Disposition pratique. La première méthode employée conduit à la décomposition pratique suivante :

315	3	360	2	1400	2
105	3	180	2	700	2
35	5	90	2	350	2
7	7	45	3	175	5
1		15	3	35	5
		5	5	7	7
		1		1	

$315 = 3^2 \times 5 \times 7$; $360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$; $1400 = 2^3 \times 5^2 \times 7$
On écrit, à gauche d'un trait vertical le nombre à décomposer et les différents quotients jusqu'à 1, et

à droite les différents diviseurs premiers successifs.
Remarque. Il est évident que le nombre premier 1 ne peut jouer le rôle de facteur premier dans la décomposition d'un nombre.

133. Produit de deux nombres décomposés en facteurs premiers.
Soit à effectuer le produit : $(2^3 \times 3^4 \times 5^2) \times (2^4 \times 3^2 \times 7)$
Ce produit s'écrit : $2^3 \times 3^4 \times 5^2 \times 2^4 \times 3^2 \times 7$
soit $2^7 \times 3^6 \times 5^2 \times 7$
Le produit de deux nombres contient tous les facteurs contenus dans les deux nombres, chacun étant affecté d'un exposant égal à la somme des exposants qu'il a dans chacun des deux nombres.
Cette règle est analogue à celle du produit de deux monômes. Elle se généralise pour plusieurs facteurs et permet de calculer les puissances d'un nombre.
Exemples :
1° $(2^3 \times 3 \times 5^2) \times (2 \times 3^4 \times 5^2) \times (3^2 \times 7) = 2^4 \times 3^7 \times 5^4 \times 7$
2° $(2^3 \times 3^4 \times 5^2)^2 = 2^6 \times 3^8 \times 5^4$
3° $(2^4 \times 3 \times 7^2)^3 = 2^{12} \times 3^3 \times 7^6$

134. Quotient de deux nombres. Considérons les nombres :
$2^7 \times 3^4 \times 5^3$ et $2^4 \times 3^2$
On peut, d'après la règle précédente, écrire :
$2^7 \times 3^4 \times 5^3 = (2^4 \times 3^2) \times (2^3 \times 3^2 \times 5^3)$
Soit $(2^7 \times 3^4 \times 5^3) : (2^4 \times 3^2) = 2^3 \times 3^2 \times 5^3$
Le quotient de deux nombres contient les facteurs du dividende, chacun étant affecté d'un exposant égal à la différence des exposants qu'il a dans le dividende et le diviseur.
Rappelons que $a^0 = 1$.
Nous voyons apparaître la condition :
Pour qu'un nombre A soit divisible par un nombre B (ou soit multiple de B), il faut et il suffit qu'il contienne tous les facteurs de B avec des exposants au moins égaux à ceux de B.

EXERCICES

514. Etablir la liste et le nombre de diviseurs de 54. Grouper par deux les diviseurs dont le produit est 54 et montrer qu'il suffit de chercher le plus petit nombre de chaque groupe.
Reprendre le même problème pour les nombres :
515. 80, 108, 128, 252.
516. 84, 250, 288, 315.
517. 36, 100, 144, 225.
Reconnaître si les nombres suivants sont premiers et donner s'il y a lieu leur plus petit diviseur premier :
518. 79, 107, 143, 173.

519. 83, 149, 181, 221.
520. 89, 167, 187, 241.
521. 97, 179, 193, 283.
522. Montrer que tout nombre premier supérieur à 5 est obligatoirement terminé par 1, 3, 7 ou 9.
Décomposer en facteurs premiers les nombres suivants :
523. 108, 144, 2520, 8000
524. 84, 250, 864, 5740.
525. 176, 294, 7920, 1053.

526. 36×42	72×77	108×75
527. $84 \times 25 \times 121$	$36 \times 27 \times 143$	$65 \times 49 \times 24$
528. 108^2	252^3	$24^2 \times 33^3 \times 11^5$

Calculer les nombres :

529. $2^3 \times 3 \times 7$	$2 \times 3^2 \times 5 \times 7$	$2^3 \times 3 \times 5 \times 11$
530. $3^2 \times 5^2 \times 11$	$3^2 \times 7 \times 11 \times 13$	$2^2 \times 7^3 \times 11 \times 17$

Effectuer en laissant les résultats sous la forme décomposée :
531. $(2^2 \times 3^4 \times 5) \times (2 \times 3 \times 7^2)$
532. $(2^3 \times 3^4 \times 5) \times (3^2 \times 7 \times 11^3) \times (5 \times 11^2)$
533. $(2^4 \times 3^2 \times 7 \times 11^3)^2$
534. $(2 \times 3^4 \times 7^3 \times 11^2)^3$
535. $(2^5 \times 3^2 \times 5^3 \times 7^2) : (2^3 \times 5 \times 7^2)$
536. $(2^7 \times 3^2 \times 5^4 \times 11) : (2^7 \times 3 \times 5^2)$

I. PLUS GRAND COMMUN DIVISEUR (P.G.C.D.)

135. Définitions. On appelle diviseur commun à deux ou plusieurs nombres tout nombre qui divise chacun d'eux.

Pour obtenir la liste des diviseurs communs à plusieurs nombres, on peut établir la liste des diviseurs de chacun d'eux et prendre les nombres communs à ces listes.

Exemple. Les diviseurs des nombres 30, 45 et 75 sont :

1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30

1, 3, 5, 9, 15, 45

1, 3, 5, 15, 25, 75

Leurs diviseurs communs sont 1, 3, 5, 15.

Le plus grand des diviseurs communs à plusieurs nombres s'appelle leur plus grans commun diviseur, en abrégé P.G.C.D. On voit ainsi que le PGCD de 30, 45, 75 est 15.

136. Diviseurs communs à deux nombres décomposés en facteurs premiers.

La condition de divisibilité (n° 134) montre que pour qu'un nombre soit un diviseur d'un nombre A, il faut et il suffit qu'il ne contienne que des facteurs contenus dans A, chacun étant affecté d'un exposant au plus égal à son exposant dans A. Il en résulte que :

Pour qu'un nombre soit un diviseur commun à deux nombres A et B, il faut et il suffit qu'il ne contienne que des facteurs communs à A et B, chacun d'eux étant affecté d'un exposant au plus égal à son plus petit exposant dans A et B.

Ainsi les nombres $720 = 2^4 \times 3^2 \times 5$ et $1512 = 2^3 \times 3^3 \times 7$ admettront pour diviseurs communs :

3, $2^3 = 8$, $2^2 \times 3 = 12$, $2^3 \times 3 = 24$.

Le plus grand des diviseurs s'obtient donc en prenant tous les facteurs communs et en affectant chacun d'eux de l'exposant le plus grand possible.

137. Règle. Le PGCD de deux nombres décomposés en facteurs premiers s'obtient en faisant le produit des facteurs communs aux deux nombres, chacun étant affecté de son plus petit exposant.

Ainsi le PGCD de $720 = 2^4 \times 3^2 \times 5$ et $1512 = 2^3 \times 3^3 \times 7$ est égal à $2^3 \times 3^2 = 72$.

D'autre part, nous voyons que les diviseurs communs de 720 et 1512 ne contiennent que des facteurs premiers contenus dans leur PGCD, avec des exposants au plus égaux à ceux de ce PGCD. Il en résulte que :

138. Théorème. Les diviseurs communs à deux nombres sont les diviseurs de leur PGCD.

Ainsi la liste des diviseurs communs à 720 et 1512 est la liste des diviseurs de leur PGCD 72, soit : 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 72.

139. Nombres premiers entre eux. On appelle nombres premiers entre eux deux nombres qui n'admettent comme diviseur commun que 1.

Autrement dit leur PGCD est 1.
Les nombres $36 = 2^2 \times 3^2$ et $25 = 5^2$ sont premiers entre eux.
Il en est ainsi chaque fois que deux nombres décomposés en facteurs premiers ne contiennent pas de facteur commun.

140. Théorème. Lorsqu'on divise deux nombres par leur PGCD, les quotients obtenus sont premiers entre eux.
Soient par exemple les nombres : $2^5 \times 3^2 \times 7^3$ et $2^3 \times 3^4 \times 5$. Divisons-les par leur PGCD qui est $2^3 \times 3^2$; les quotients sont respectivement : $2^2 \times 7^3$ et $3^2 \times 5$.
Ces quotients n'ont pas de facteur commun et sont donc premiers entre eux.

II. PLUS PETIT COMMUN MULTIPLE (P.P.C.M.)

141. Définitions. On appelle multiple commun à deux ou plusieurs nombres tout nombre qui est multiple de chacun d'eux.
Ainsi 60 est un multiple commun à 6,10 et 15.
Il y a toujours une infinité de multiples communs à plusieurs nombres, en particulier le produit de ces nombres et ses multiples.
Le plus petit des multiples communs à plusieurs nombres s'appelle leur plus petit commun multiple, en abrégé P.P.C.M.
Il est facile de voir que le PPCM de 6, 10 et 15 est égal à 30.

142. Multiples communs à deux nombres décomposés en facteurs premiers.
Il résulte immédiatement de la condition de divisibilité (n° 176) que :
Pour qu'un nombre soit un multiple commun à deux nombres A et B, il faut et il suffit qu'il contienne tous les facteurs contenus dans A et B, chacun d'eux étant affecté d'un exposant au moins égal à son plus grand exposant dans A et B.
Ainsi les nombres $360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$ et $500 = 2^2 \times 5^3$ admettent pour multiples communs :
$2^3 \times 3^3 \times 5^3 = 27\,000$, $2^3 \times 3^2 \times 5^3 \times 7 = 126\,000$.
Le plus petit des multiples communs s'obtient en prenant seulement les facteurs dans les deux nombres et en affectant chacun d'eux de l'exposant le plus petit possible. D'où :

143. Règle. Le PPCM de deux nombres décomposés en facteurs premiers s'obtient en faisant le produit de tous les facteurs contenus dans les deux nombres, chacun étant affecté de son plus grand exposant.
Le PPCM de 360 et 500 est $2^3 \times 3^2 \times 5^3 = 9000$.
Nous voyons d'autre part que les multiples communs aux deux nombres contiennent tous les facteurs premiers de leur PPCM avec des exposants au moins égaux à ceux du PPCM. D'où :

144. Théorème. Les multiples communs à deux nombres sont les multiples de leur PPCM.
Ainsi les multiples communs à 360 et 500 sont les multiples de leur PPCM 9000. Leur liste

commence donc par :
9000, 18 000, 27 000, etc ...

145. PGCD et PPCM de plusieurs nombres. Les conditions nécessaires et suffisantes des n° 136 et 142 s'étendent à plusieurs nombres. Il en est par suite de même des règles du PGCD et du PPCM ainsi que des théorèmes n° 138 et 144.
Exemple. Calculer le PGCD et le PPCM des nombres 300, 360 et 480. Etudier la liste de leurs diviseurs communs et celle de leurs multiples communs.
Décomposons ces nombres en facteurs premiers :
$300 = 2^2 \times 3 \times 5^2$; $360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$; $480 = 2^5 \times 3 \times 5$
Leur PGCD est égal à $2^2 \times 3 \times 5 = 60$.
Leur PPCM est égal à $2^5 \times 3^2 \times 5^2 = 7\,200$
La liste de leurs diviseurs communs est celle des diviseurs de 60 :
1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60.
La liste de leurs multiples communs est celle des multiples de 7200 :
7200, 14400, 21600, etc ...

EXERCICES

Calculer le PGCD des nombres suivants :
537. 168 et 360. 538. 252 et 684. 539. 336 et 462.
540. 1840 et 1260. 541. 18150 et 23850. 542. 33390 et 58800
543. 315, 819 et 924. 544. 252, 693 et 945. 545. 2520, 3150 et 4410.
546. 7560, 10080 et 12096.
Etudier la liste des diviseurs communs aux nombres :
547. 4200 et 5880 548. 1440 et 1764. 549. 3780, 4320 et 5184.
550. 10584, 11520 et 13104.
Calculer le PPCM et les trois multiples communs les plus simples de :
551. 360 et 504. 552. 252 et 672. 553. 972 et 1134.
554. 720 et 900. 555. 168, 252 et 336. 556. 120, 180 et 270.
557. 1° Calculer le PGCD et le PPCM de 576 et 1080.
2° Comparer le produit des deux résultats au produit des deux nombres. Généraliser.
558. 1° calculer le PGCD et le PPCM de 99 et 140.
2° Quel est le PPCM de deux nombres premiers entre eux ?
559. 1° Calculer le PGCD et le PPCM de 144 et 180.
2° Que deviennent les résultats précédents lorsqu'on multiplie (ou divise) les deux nombres par 6 ? Généraliser.
560. Démontrer que si un nombre en divise deux autres, il divise leur somme, leur différence et le reste de leur division.
561. La division de deux nombres se fait exactement. Quel est leur PGCD, et leur PPCM ?

562. Montrer que la liste des diviseurs communs à deux nombres est la même que celle du plus petit de ces nombres et du reste de leur division. Que peut-on dire des PGCD ?
563. Utiliser la méthode indiquée au numéro précédent pour la recherche du PGCD des nombres 2021 et 2679.
564. Trouver deux nombres non divisibles l'un par l'autre sachant que leur PGCD est 336 et leur somme est 2688.
565. Par quel nombre inférieur à 100 faut-il diviser 29687 et 35312 pour obtenir pour restes respectifs 47 et 32 ? Quels sont alors les quotients ?
566. En divisant 809 et 1024 chacun par un certain nombre, on trouve le même quotient et pour restes respectifs 27 et 35. Reconstituer les deux divisions.
567. On a planté des arbres également espacés sur le pourtour d'un terrain triangulaire dont les côtés mesurent 144, 180 et 240 m. Sachant qu'il y a un arbre à chaque sommet, et que la distance de deux arbres consécutifs est comprise entre 4 m et 10 m, calculer le nombre d'arbres plantés.
568. Un ouvrier a été payé pour trois mois successifs 2310 fr, 2640 fr et 2970 fr. Sachant que son salaire journalier n'a pas varié et qu'il a travaillé plus de 15 jours par mois, trouver le nombre de jours de travail effectués chaque mois.
569. On a fait carreler une pièce rectangulaire de 4,20 m sur 2,24 m. Sachant que les carreaux employés ont un côté compris entre 10 cm et 25 cm, calculer la longueur de leur côté et leur nombre.
570. On veut partager en coupons d'égale longueur quatre pièces d'étoffe mesurant respectivement 17,50 m, 28 m, 31,50 m et 42 m. Trouver la plus grande longueur possible pour chaque coupon et le nombre total de ces coupons.
571. Deux règles d'égale longueur sont graduées, l'une en 72 parties l'autre en 126 parties. On fait coïncider leurs extrémités. Déterminer les traits de division qui coïncident.
572. Trouver les multiples communs à 6, 8, 10 compris entre 500 et 1000.
573. Trouver les trois nombres les plus simples divisibles par les dix premiers nombres entiers.
574. Quel est le plus petit nombre qui donne 7 pour reste quand on le divise par 12, par 15 ou par 16.
575. Trouver un nombre qui donne 16 pour reste quand on le divise par 24 ou par 32, et 8 pour reste quand on le divise par 20.
576. Trouver le plus petit nombre qui, divisé par 5, 6, ou 8, donne respectivement pour restes 4, 5, ou 7.
577. Deux cyclistes roulent dans le même sens sur une piste. Le premier fait un tour en 1 minute 45 secondes, le second en 1 mn 36 s. Sachant qu'ils sont partis ensemble de la ligne de départ, on demande après combien de temps ils passeront ensemble cette ligne de départ. Combien de tours chacun aura-t-il effectués ?
578. Des pavés rectangulaires qui ont 12 cm de large et 21 cm de long ont servi à paver entièrement une place carrée. Calculer le côté de cette place sachant qu'il mesure un nombre entier de mètres compris entre 30 m et 60 m.
579. Trois règles graduées de 960 mm de long sont placées côte à côte de façon que leurs extrémités coïncident Les divisions ont pour longueurs respectives 10 mm, 12 mm et 16 mm. Déterminer les

traits de division qui coïncident sur les trois règles.
580. Une personne a acheté un certain nombre entier de mètres d'étoffe à 32,50 fr le mètre. Elle paie exactement avec des billets de 50 fr. Sachant que la dépense totale n'excède pas 1000 fr, trouver le nombre de mètres achetés.
581. Un enfant compte ses timbres-poste par 12, par 16 et par 20. Il lui en reste 8 à chaque fois. En les comptant par 13, il ne lui en reste plus. Combien possède-t-il de timbres ?
582. En comptant les élèves d'une école par 9, 10 ou 12, il en reste respectivement 8, 9 et 11. En les comptant par 11, il n'en reste pas. Trouver le nombre d'élèves de l'école.
583. Des autobus partent d'un même point dans quatre directions différentes. Les départs se font respectivement dans chaque direction toutes les 5 minutes, 8, 12 et 18 minutes. Un départ simultané a lieu à 6 heures le matin. Quelles sont les heures des autres départs simultanés dans la journée ?

APPLICATION AUX FRACTIONS

146. Simplification d'une fraction.

Pour simplifier une fraction, il suffit de diviser ses deux termes par un de leurs diviseurs communs.

Ainsi : $\frac{126}{189} = \frac{126:9}{189:9} = \frac{14}{21}$

Il est évident que l'on ne peut répéter cette opération indéfiniment. Si en particulier on divise les deux termes d'une fraction par leur PGCD, on obtient une fraction qui a ses termes premiers entre eux (n° 140).

126 et 189 ont pour PGCD 63 :

$\frac{126}{189} = \frac{126:63}{189:63} = \frac{2}{3}$

On ne peut plus simplifier la fraction 2/3 : elle est dite irréductible.

On appelle fraction irréductible une fraction dont les termes sont premiers entre eux.

Nous admettrons sans démonstration qu'il n'y a qu'une fraction irréductible égale à une fraction donnée, d'où :

147. Théorème. Pour obtenir la fraction irréductible égale à une fraction donnée, il suffit de diviser ses termes par leur PGCD.

On dit encore que la fraction ainsi obtenue est réduite à sa plus simple expression.

148. Méthode pratique. La recherche d'un PGCD est parfois assez longue. Lorsque les deux termes d'une fraction admettent un diviseur commun évident, on commence par diviser les deux termes de la fraction par ce diviseur commun.

Exemple. Simplifier $\frac{14\,490}{22\,770}$.

On obtient immédiatement en divisant les deux termes par 10 puis par 9 :

$$\frac{1449}{2277} = \frac{161}{253}$$

La décomposition en facteurs premiers donne : $161 = 7 \times 23$ et $253 = 11 \times 23$ d'où

$$\frac{161}{253} = \frac{7}{11} \quad \text{(fraction irréductible)}$$

149. Fractions égales. Soit n le PGCD des deux termes d'une fraction $\frac{a}{b}$ égale à la fraction irréductible $\frac{7}{11}$. Puisque $\frac{a:n}{b:n} = \frac{7}{11}$, la fraction $\frac{a}{b}$ s'écrit $\frac{7n}{11n}$.

On traduit ceci en disant que :

une fraction quelconque a ses termes équimultiples de ceux de la fraction irréductible égale. Pour obtenir toutes les fractions égales à 7/11, il suffit de donner à n toutes les valeurs possibles :

$\frac{7}{11}$, $\frac{7 \times 2}{11 \times 2}$, $\frac{7 \times 3}{11 \times 3}$, etc.

150. Règle. Pour obtenir une fraction quelconque égale à une fraction donnée, il faut :
1° chercher la fraction irréductible égale,
2° multiplier les deux termes de cette fraction irréductible par un même nombre entier.

151. Application aux fractions décimales.

1° Considérons la fraction décimale $\frac{324}{1000}$. Simplifions-la :

$$\frac{2^2 \times 3^4}{2^3 \times 5^3} = \frac{3^4}{2 \times 5^3}$$

Le dénominateur de la fraction irréductible égale ne contient que les facteurs premiers 2 et 5 et ne peut évidemment en contenir d'autres.

2° Considérons la fraction irréductible $\frac{7 \times 11}{2^3 \times 5^2}$. Multiplions ses termes par 5. Nous obtenons

$$\frac{7 \times 5 \times 11}{2^3 \times 5^3} = \frac{385}{1000}$$

Nous pouvons en conclure :

Théorème. Pour qu'une fraction donnée soit égale à une fraction décimale, il faut et il suffit que le dénominateur de la fraction irréductible égale ne contienne pas de facteur premier autre que 2 ou 5.

152. Réduction au même dénominateur. Soit à réduire au même dénominateur :

$\frac{10}{96}$, $\frac{21}{120}$ et $\frac{33}{270}$.

1° Simplifions ces fractions, nous obtenons

$\frac{5}{48}$, $\frac{7}{40}$ et $\frac{11}{90}$.

2° Le dénominateur commun cherché est un multiple commun de 48, 40 et 90. Calculons leur PPCM :

$48 = 2^4 \times 3$; $40 = 2^3 \times 5$; $90 = 2 \times 3^2 \times 5$.

Le PPCM est donc $2^4 \times 3^2 \times 5 = 720$.

3° Pour obtenir 720, il faut multiplier 48 par 15, 40 par 18 et 90 par 8. Les fractions s'écriront :

$$\frac{5 \times 15}{48 \times 15} , \frac{7 \times 18}{40 \times 18} \text{ et } \frac{11 \times 8}{90 \times 8}$$

soit $\frac{75}{720}$, $\frac{126}{720}$ et $\frac{88}{720}$.

153. Règle. Pour réduire plusieurs fractions au plus petit dénominateur commun possible, il faut :
- réduire les fractions à leur plus simple expression,
- chercher le PPCM des nouveaux dénominateurs,
- multiplier les termes de chaque fraction réduite par le quotient de ce PPCM par son dénominateur.

154.Application. Calculer : $\frac{123}{270} - \frac{45}{175} + \frac{77}{882}$.

Simplifions : $\frac{41}{90} - \frac{9}{35} + \frac{11}{126}$

Décomposons les dénominateurs :

$90 = 2 \times 3^2 \times 5$ $\quad 35 = 5 \times 7$ $\quad 126 = 2 \times 3^2 \times 7$

Prenons pour dénominateur commun leur PPCM : $2 \times 3^2 \times 5 \times 7$.

Nous obtenons : $\frac{41 \times 7 - 9 \times 2 \times 3^2 + 11 \times 5}{2 \times 3^2 \times 5 \times 7}$

soit après simplification : $\frac{287 - 162 + 55}{630} = \frac{180}{630} = \frac{2}{7}$

EXERCICES

Simplifier les fractions suivantes :

584. $\frac{1815}{2385}$; $\frac{2184}{7560}$

585. $\frac{8613}{9009}$; $\frac{12012}{25025}$

586. $\frac{3339}{5880}$; $\frac{17226}{18810}$

587. $\frac{6720}{9405}$; $\frac{15120}{30576}$

588. $\frac{5292}{8400}$; $\frac{9360}{18144}$

589. $\frac{5203}{6149}$; $\frac{43659}{68607}$

590. $\frac{168 \times 462}{336 \times 360}$; $\frac{252 \times 684}{840 \times 1260}$

591. $\frac{507 \times 451}{861 \times 396}$; $\frac{315 \times 693}{924 \times 504}$

592. $\frac{441 \times 1815 \times 3339}{588 \times 2385 \times 3150}$

593. $\frac{756 \times 336 \times 2205}{252 \times 924 \times 12096}$

Effectuer les opérations suivantes :

594. $\frac{90}{189} + \frac{45}{84} - \frac{75}{126}$

595. $\frac{51}{56} + \frac{88}{231} - \frac{26}{39}$

596. $\frac{77}{35} - \frac{80}{66} - \frac{56}{105}$

597. $\frac{91}{52} + \frac{9}{84} - \frac{55}{105}$

598. $\frac{96}{160} + \frac{57}{105} - \frac{39}{77}$

599. $\frac{171}{76} - \frac{161}{147} - \frac{35}{60}$

600. $\left(\frac{168}{192} - \frac{50}{112} + \frac{65}{273}\right) \times \frac{3}{4}$

601. $\left(\frac{85}{153} + \frac{21}{60} - \frac{35}{225}\right) \times \frac{2}{5}$

602. $\left(\frac{18}{72} - \frac{23}{115} + \frac{45}{63}\right) : \frac{2}{7}$

603. $\left(\frac{100}{275} - \frac{45}{189} + \frac{60}{198}\right) : \frac{3}{11}$

604. Trouver une fraction égale à $\frac{52}{117}$ et dont la somme des termes soit 325.

605. Trouver une fraction égale à $\frac{44}{121}$ et dont la différence des termes soit 357.

606. La somme de deux fractions dont l'une est les 3/7 de l'autre est égale à 40/21. Calculer les deux fractions.

607. Trouver une fraction égale à 192/300 dont le PGCD des termes soit égal à 13.

608. Trouver une fraction égale à 132/385 et dont le PPCM des termes soit 2100.

609. Trouver deux fractions sachant que leur quotient est égal à 23/5 et que leur somme est égale à 35/3.

610. Trouver deux fractions sachant que leur quotient est égal à 17/8 et que leur différence est égale à 23/28.

611. Trouver les fractions égales à 126/192 et :

1° dont les termes soient inférieurs à ceux de la fraction proposée ;

2° dont le numérateur soit inférieur à 400 et le dénominateur supérieur à 500 ;

3° dont la différence des termes soit égale à 132.

612. Trouver deux fractions ayant pour numérateur 1, dont les dénominateurs sont deux nombres entiers consécutifs et comprenant entre elles la fraction 13/84.

613. Deux règles graduées placées côte à côte de façon que leurs origines coïncident mesurent respectivement 1,40 m et 1,68 m. La première est partagée en 48 parties égales et la seconde en 32 parties égales. Déterminer par leurs numéros les traits des deux graduations qui coïncident.

614. Deux pièces d'étoffe mesurent respectivement 225/8 de mètre et 175/12 de mètre. On veut les découper en coupons d'égale longueur. Quelle est la plus grande longueur possible pour chacun de ces coupons et combien de coupons chacune des pièces fournira-t-elle ?

615. Trouver la plus petite fraction dont les quotients par 28/45 et par 40/63 soient des nombres entiers. Comparer les termes de la fraction trouvée au PPCM des numérateurs et au PGCD des dénominateurs des deux fractions proposées.

616. Soient les fractions 63/22 et 99/20. Trouver la plus grande fraction qui soit contenue un nombre entier de fois dans chacune de ces fractions. Comparer les termes de la fraction trouvée au PGCD des numérateurs et au PPCM des dénominateurs des deux fractions proposées.

617. Réduire la fraction 168/315 à sa plus simple expression. Trouver ensuite toutes les fractions égales à la fraction donnée, et à termes plus petits. Quel est le nombre de ces fractions ? Déterminer une fraction égale à 168/315 et dont le numérateur et le dénominateur ont pour somme 8303.

(Bourses).

618. Calculer l'excès de l'unité sur la fraction 8/11. On ajoute 5 à chacun des deux termes de cette

fraction (on remarquera que la différence des deux termes ne change pas) : calculer l'excès de l'unité sur la fraction ainsi obtenue. Dire d'après cela si la fraction 8/11 augmente ou diminue lorsqu'on ajoute un même nombre aux deux termes.
En employant un procédé analogue, dire si la fraction 15/7 augmente ou diminue lorsqu'on ajoute un même nombre à ses deux termes. (Bourses)

619. Un marchand revend à raison de 45 fr le mètre une pièce d'étoffe qu'il a achetée à un prix inconnu. Il vend une première fois les 3/8 de la pièce, une deuxième fois les 3/5 du reste et une troisième fois la moitié du nouveau reste. Ces trois ventes ont déjà produit une somme égale au prix d'achat total de la pièce, augmenté de 45 fr.. Dans une quatrième vente, le marchand vend le reste de la pièce, et son bénéfice total est 720 fr.
Calculer la longueur de la pièce et le prix d'achat du mètre. (Bourses)

620. Une pièce de ruban de 14 mètres a été vendue à trois acheteurs. Le premier a eu les 2/5 de la pièce ; le second a eu une part égale aux 5/7 de la part vendue au premier ; le troisième a eu le reste.
Calculer la longueur du ruban vendu à chaque acheteur.
Le premier a payé 2,25 fr par mètre, les deux autres ont payé 3,50 fr par mètre. Calculer le prix d'achat de la pièce, sachant que le bénéfice du marchand est le 1/3 du prix d'achat. (Bourses).

EXERCICES DE RÉVISION

Calcul algébrique

658. Soient sur un axe deux points A et B d'abscisses a et b. Calculer les abscisses des points M et N qui partagent AB en 3 parties égales.

659. On donne sur un axe trois points A, B, C d'abscisses a, b, et c. Trouver l'abscisse du point G tel que : $\overline{GA} + \overline{GB} + \overline{GC} = 0$.

660. Soient sur un axe quatre points A, B, C, D. Démontrer la relation :
$\overline{AB} . \overline{CD} + \overline{BC} . \overline{AD} + \overline{CA} . \overline{BD} = 0$.

661. On donne sur un axe trois points A, B, M. On désigne par O le milieu de AB. Démontrer les relations :

1° $\overline{MA} + \overline{MB} = 2\ \overline{MO}$ et 2° $\overline{MA} . \overline{MB} = \overline{MO}^2 - \dfrac{\overline{AB^2}}{4}$.

662. Soient deux points A et B d'un axe, O le milieu de AB et M un point quelconque de l'axe. Démontrer les relations :

1° $\overline{MA}^2 + \overline{MB}^2 = 2\ \overline{MO}^2 + \dfrac{\overline{AB^2}}{2}$ et 2° $\overline{MA}^2 - \overline{MB}^2 = 2\ \overline{AB} . \overline{OM}$.

Effectuer les produits suivants :

663. $(3/4) \times (a^2x^3y^2) \times (-2/9)\ (bx^2y^4) \times (-10\ a^2b^3x^4y^2)$
664. $(2x + 3) \times (x - 5) \times (3x + 1)$
665. $(2x^3 - 3x^2 + 4x) \times (4x^2 + 6x + 8)$
666. $(2x - 3y)^2 \times (x - y + 1)$

Calculer les expressions suivantes :

667. $x (x + 1)(x + 2) - 3(x - 2)(x + 2) + 2(x - 6)$
668. $(2x + 3y)(2y - 1) - (2x - y)(5x - 1) + (2x - 3y)(5x + 2y)$
669. $(5x + 3y)(3x - 2y) + (5x + 2y)(3y + 1) - (5x - 2y)(3x + 1)$
670. $(ax - y)(ax - 2y) + 3y(ax - y + 1) - y(8y + 3)$

Etablir les identités suivantes :

671. $(a + b - c)^2 + (a - b + c)^2 = 2a^2 + 2(b - c)^2$
672. $(a + b + c)^2 - (a - b - c)^2 = 4a(b + c)$
673. $(a + b)^3 + (a - b)^3 = 2a(a^2 + 3b^2)$
674. $(ab + 1)^2 + (a - b)^2 = (a^2 + 1)(b^2 + 1)$
675. $(ab + 1)^2 - (a + b)^2 = (a^2 - 1)(b^2 - 1)$

Décomposer en un produit de facteurs les expressions suivantes :

676. $12\ a^2b - 3b3$
677. $48\ x^2y^2 - 27\ y4$
678. $x^2 + 6x + 9$
679. $3x^2 - 30x + 75$
680. $(2x + 3)^2 - 49$
681. $x^2 - 10x + 21$
682. $(2a - b)^2 - a^2$
683. $(2a + b)^2 - (a + 2b)^2$
684. $(ax + 1)^2 - (x + a)^2$
685. $(ax + b)^2 + (bx - a)^2$

Simplifier les expressions suivantes :

686. $\dfrac{(a+b)^2 - c^2}{(a+c)^2 - b^2}$ 687. $\dfrac{(3a+2b)^2 - (a+2b)^2}{a^2 - b^2}$ 688. $\dfrac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 1}$ 689. $\dfrac{4x^2 - 9}{4x^2 + 8x - 21}$

690. $\dfrac{(a+1)}{(a-1)} + \dfrac{(a-1)}{(a+1)} - \dfrac{(4a)}{(a^2-1)}$

691. $\dfrac{2}{(2a+b)} - \dfrac{1}{(2a-b)} + \dfrac{2b}{4a^2-b^2}$

692. $\dfrac{x^2}{x-1} + \dfrac{1}{x+1} - \dfrac{2x}{x^2-1}$

693. $\dfrac{x+1}{x} - \dfrac{2}{x^2+2x} + \dfrac{x-1}{x+2}$

694. $\dfrac{\dfrac{x+1}{x} - \dfrac{x}{x+1}}{1 + \dfrac{x}{x+1}}$

695. $\dfrac{\dfrac{a-b}{b} + \dfrac{2b}{a+b}}{\dfrac{a+b}{a} - \dfrac{2b}{a+b}}$

696. Soient les rapports égaux a/a' = b/b' = c/c'. Démontrer que chacun de ces rapports est égal à $\dfrac{5a - 3b + 2c}{5a' - 2b' + 2c'}$

697. Soit la proportion a/b = c/d. Démontrer que $\dfrac{a^2+b^2}{c^2+d^2} = \dfrac{ab}{cd}$

698. Démontrer que si a, b, c, d vérifient la relation $(ad + bc)^2 = 4abcd$, ces 4 nombres forment une proportion.

699. Démontrer que si $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac + bd)^2$, les 4 nombres a, b, c, d forment une proportion.

Equations du premier degré

Résoudre les équations suivantes :

700. (x-1)/3 + 4(2x - 3)/9 = (5x+1)/8
701. (x + 5)/6 + (x + 9)/8 = (2x + 7)/9
702. (5x - 9)/3 + (7x - 5)/9 = (3x - 143)/4
703. (13x - 16)/15 + (x - 22)/35 = (295 - x)/21
704. (3x - 2)/18 + (2x - 9)/45 = (x + 3)/10
705. (4x + 9)/77 - (5x + 12)/14 = (11x + 28)/22
706. (x + 5)/4 - (x - 3)/6 = x/3
707. x - (x + 1)/3 = (3x + 4)/5
708. (5x - 7)/4 + (3x - 5)/8 = (9x - 4)/5
709. (4x - 1)/3 + (3x - 1)/2 = (10x + 63)/7
710. (x - 8)/5 - (x - 23)/15 = (43 - x)/18
711. (13x - 34)/21 - (3x - 7)/56 = (19 - 7x)/24

712. $\dfrac{3x-1}{7} + \dfrac{3x-4}{5x-3} = \dfrac{6x+5}{14}$

713. $\dfrac{2x-7}{2(x-1)} = 1 + \dfrac{1}{4-x}$

714. $\dfrac{3}{x-3} + \dfrac{4}{x-5} = \dfrac{7}{x-4}$

715. $\dfrac{2x+3}{5x-3} = \dfrac{3}{2(2x-3)} + \dfrac{2}{5}$

716. $\dfrac{9x+2}{6(x+1)} - \dfrac{5x+8}{2x+1} = -\dfrac{x+5}{x+1}$

717. $\dfrac{5}{2(3x+2)} - \dfrac{1}{2x+3} = \dfrac{1}{3x-8}$

718. (2x - 3)(4x - 12) = 0
719. x(x - 7)(3x - 2) = 0
720. $x^2 - (4x - 5)^2 = 0$
721. $(2x - 3)^2 - (x + 6)^2 = 0$

722. $\frac{4}{3-2x} + \frac{9}{x+3} = \frac{13}{2x+3}$ 723. $\frac{4}{x+10} + \frac{5}{x-20} = \frac{9}{x+20}$

Résoudre les équations suivantes où m est un nombre supposé connu :

724. $(8x - 5m)/7 - (5x - 11m)/5 = (78 - x)/35$ 725. $m(x - m) = x - 1$

726. $(4x + m)/5 - 3(x - 1)/4 = (2x - m + 3)/10$ 727. $x + m^2 + 1 = m(x + 2)$

728. Soit l'équation : $(5x - m)/3 - (4x + m)/5 = 7(3x + 4)/14$

dans laquelle m est un nombre supposé connu.

1° Résoudre cette équation.

2° Déterminer m de façon que $x = -1$.

3° Calculer les valeurs de m pour lesquelles $x > 3$.

Problèmes du premier degré

729. La somme de deux nombres est 324. En ajoutant 26 à chacun d'eux, l'un devient triple de l'autre. Quels sont ces deux nombres ?

730. La différence de deux nombres est 1032. Le quotient entier de ces deux nombres est 13 et le reste de leur division 48. Quels sont ces deux nombres ?

731. Deux cyclistes partent en même temps de deux villes A et B distantes de 200 km et vont à la rencontre l'un de l'autre. Ils se rencontrent au bout de 4 heures. Si le cycliste qui part de A était parti une demi-heure avant l'autre, la rencontre aurait eu lieu 3 h 48 mn après le départ du deuxième cycliste. Quelle est la vitesse de chacun d'eux ?

732. Un train a mis 36 secondes à passer devant un observateur immobile. Sa longueur est 300 m. Quelle est sa vitesse ? Un second train met 24 s pour croiser le premier et passe devant l'observateur immobile en 18 secondes. Trouver la longueur et la vitesse du second train.

733. Deux cyclistes sont séparés par une distance de 54 km. S'ils allaient à la rencontre l'un de l'autre, ils se rencontreraient au bout de 1 heure. S'ils allaient dans le même sens ils se rejoindraient au bout de 9 heures. Quelle est la vitesse de chaque cycliste ?

734. Deux capitaux ont pour somme 30 000 francs. L'un est placé à 6% et l'autre à 5%. La somme de leurs intérêts annuels est 1620 francs. Quelle est la valeur de chaque capital ?

735. Deux lingots d'or sont l'un au titre de 0,95, l'autre au titre de 0,8. On les fond ensemble en ajoutant 3 kg d'or pur. Le lingot ainsi obtenu est au titre de 0,906 et pèse 37,5 kg. Quel est le poids respectif des lingots primitifs ?

736. On veut obtenir 450 g d'un alliage d'or au titre de 0,83 en fondant des lingots aux titres respectifs de 0,8 et 0,9. Quels doivent être les poids de ces deux lingots ?

737. Un épicier achète 100 kg de café, une partie à 24 fr le kg et l'autre à 28 fr le kg. Il revend le tout pour 3024 fr avec un bénéfice de 20% sur le prix d'achat. Quels sont les poids respectifs de chaque qualité de café ?

738. Un terrain rectangulaire a 414 m de périmètre. Si la longueur augmentait du tiers de sa valeur et que la largeur diminuait du tiers de la sienne, le périmètre augmenterait de 26 m. Quelles sont les dimensions de ce terrain ?

739. La longueur d'un rectangle est supérieure à sa largeur de 21 m. Si on augmentait ses

dimensions de 4 m, la surface augmenterait de 492 m². Trouver les dimensions de ce rectangle.
740. Deux capitaux sont tels que le second surpasse de 2300 fr les 3/4 du premier. En les plaçant à 3,6%, le premier pendant 7 mois et le second pendant 5 mois, l'intérêt du premier dépasse de 207,30 fr l'intérêt du second. Calculer les deux capitaux.
741. Deux villes A et B sont distantes de 600 km. La tonne de charbon coûte 400 fr en A et 480 fr en B, et le transport coûte 0,50 fr par tonne et par km. Trouver le point C situé entre A et B où le charbon revient au même prix, soit qu'il vienne de A, soit qu'il vienne de B.
742. Une somme de 2170 francs est partagée entre 2 personnes. La première ayant dépensé les 5/7 de sa part et la deuxième les 2/5 de la sienne, il leur reste la même somme. Trouver les deux parts.
743. Deux cyclistes partent en même temps de deux villes A et B et vont à la rencontre l'un de l'autre. Celui qui part de A fait 6 km/h de plus que l'autre et s'arrête un quart d'heure après chaque heure de marche. L'autre qui part de B n'a qu'un seul arrêt de 12 minutes. Les cyclistes se rencontrent au bout de 5 heures au milieu de AB. Trouver la distance AB et la vitesse de chaque cycliste.
744. Partager une somme de 4134 francs proportionnellement aux trois nombres 11, 13 et 15.
745. Les fortunes de trois personnes sont proportionnelles aux nombres 2, 3, 4. En additionnant la première, le double de la seconde et le triple de la troisième, on trouve 100 000 francs. Quelles sont ces trois fortunes ?
746. Un cultivateur a vendu 17 280 francs sa récolte de blé et 8640 francs sa récolte d'avoine. Le poids du blé surpasse de 16 quintaux celui de l'avoine. Sachant que le prix du quintal de blé est les 8/5 de celui du quintal d'avoine,
1° Trouver les quantités vendues de chacune des deux céréales.
2° Quel est le prix du quintal de chacune d'elles.
747. Un automobiliste part à 8 h 40 d'une ville A et se rend à une ville B située à 39 km de A. Au retour il fait un détour de 21 km mais sa vitesse surpasse de 10 km/h sa vitesse à l'aller, si bien que la durée du trajet retour est égale aux 4/3 de la durée du trajet aller.
1° Calculer la vitesse de l'automobile à l'aller et au retour.
2° Il s'est arrêté 1 h 26 mn en B. Quelle est l'heure de son retour en A ?
748. Un chemisier a acheté deux lots de chemises identiques. Il vend le premier lot pour 2880 fr en réalisant un bénéfice de 12 fr par unité. Il vend une partie du deuxième lot pour 900 fr avec un bénéfice de 15 fr et le reste pour 1260 fr avec un bénéfice de 10 fr par chemise. Sachant que le nombre de chemises du deuxième lot est les 3/4 de celui du premier lot :
1° Trouver le prix d'achat d'une chemise.
2° Trouver le nombre de chemises vendues à chaque fois.
749. Un cycliste effectue un trajet comprenant 36 km de terrain plat, 24 km de montées et 48 km de descentes. Dans les montées sa vitesse moyenne diminue de 12 km/h, et en descente elle augmente de 15 km/h. Sachant que la durée du trajet en terrain plat est le tiers de la durée totale du trajet, trouver :
1° la vitesse du cycliste en terrain plat,
2° quelle est la durée totale du trajet, et la vitesse moyenne réalisée.